

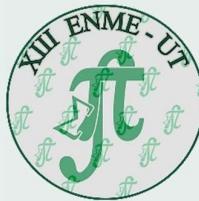


Universidad  
del Tolima



ACREDITADA  
DE ALTA CALIDAD

*jConstruimos la universidad que soñamos!*



$$(x - a)(x - b) = x$$

$$\text{U} \quad \frac{d}{dx}(x^n) =$$



$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}, \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$



$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$



Universidad  
del Tolima

ACREDITADA  
DE ALTA CALIDAD

*jConstruimos la universidad que soñamos!*

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas y Estadística

$$\sum x_n e^{-nx} = e^{-x} \rightarrow \dots$$

## Encuentro Nacional de Matemáticas y Estadística



$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ (Normal)}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \text{ (Exponencial)}$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \text{ (Poisson)}$$

### Actividades:

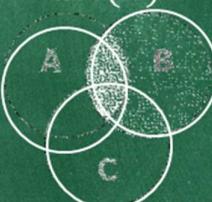
☒ Conferencias

☒ Comunicaciones

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

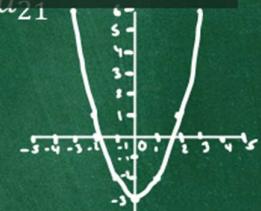
☒ Pósteres

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\lambda \mathbf{v} = A \mathbf{v}$$



**VOLUMEN 5 No. 1, SEPTIEMBRE 2025**

ISSN electrónico: 2665-5187

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## COMITÉ ORGANIZADOR

- Deicy Villalba Rey  
*Doctora en Estadística  
Coordinadora del Encuentro*
- Edith Johana Medina Hernández  
*Doctora en Estadística*
- Nidia Yadira Caicedo Bravo  
*Doctora en Ciencias Matemáticas*
- Alfonso Sánchez Hernández  
*Magister en Investigación Operativa y Estadística*
- Brian David Vásquez Campos  
*Doctor en Matemáticas*
- Leonardo Duván Restrepo Álape  
*Magister en Biomatemáticas  
Decano Facultad de Ciencias*

## COMITÉ CIENTÍFICO

### Área de Matemáticas:

- Anton Arnold Oostra Van Noppen  
*Doctor en Ciencias-Matemáticas*
- Jesús Antonio Ávila Guzmán  
*Doctor en Matemáticas*

- Jaleydi Cárdenas Poblador  
*Magister en Ciencias-Matemáticas,  
Candidata a Doctora en Ciencias con Orientación en Matemáticas Aplicadas.*

### Área de Estadística:

- Gisou Díaz Rojo  
*Doctora en Estadística y Optimización*
- Joaquín González Borja  
*Doctor en Ciencias-Estadísticas*
- Eddy Johanna Fajardo Ortiz  
*Doctora en Estadística*

### Área de Educación Matemática

- Arturo Alexander Castro Galvis.  
*Magister en Matemáticas. Candidato a Doctor en Educación mención Matemáticas.*

## COMITÉ LOGÍSTICO

- Sandra Yolima Caro  
*Directora programa Matemáticas con Énfasis en Estadística*
- Liliana Rocío Bermúdez González  
*Secretaria de la Facultad de Ciencias*

**Compilador:** Jairo Armando Cardona B.

**Institución editora:** Universidad del Tolima  
Ibagué-Tolima-Colombia

ISSN electrónico: 2665-5187

Fecha de publicación: septiembre de 2025

Todos los derechos reservados



Encuentro Nacional de  
**Matemáticas y Estadística**

**XIII ENME-UT**

Ibagué, septiembre 3, 4 y 5 de 2025

# **LIBRO DE RESÚMENES**

**VOLUMEN 5 No. 1, SEPTIEMBRE 2025**

**ISSN electrónico: 2665-5187**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## CONTENIDO

<b>PRESENTACIÓN.....</b>	1
<b>PROGRAMACIÓN GENERAL.....</b>	3
<b>CURSILLOS.....</b>	12
Introducción al modelado espacio-temporal de datos satelitales.....	13
Árboles de clasificación y regresión.....	14
Una introducción a la Geometría Algebraica.....	17
Espacios Vectoriales Topológicos.....	19
<b>CONFERENCIAS.....</b>	20
Retículos de sublógicas intuicionistas y clásicas.....	21
Effective Sample Size Under Infill Domain Asymptotics.....	23
On a Surprising Connection between Finance and Soliton Equations.....	25
Estudiando automorfismos de superficies cuárticas en $P^3$ .....	26
<b>COMUNICACIONES MATEMÁTICAS.....</b>	28
Cálculo de la transformada de Laplace multiplicativa inversa a través de series de Laguerre multiplicativas.....	29
Relación entre grafos y conjuntos diferencia.....	31
Explorando Topologías de Progresiones Aritmética y Algunas Generalizaciones.....	33
Una demostración del Teorema de Rolle a la Carathéodory.....	35
Aplicaciones de la Geometría Algebraica en Redes de Reacción.....	37
Estudio de la dinámica suave y no suave de una variación del modelo epidemiológico SIR.....	39
Algunas Sucesiones de Números Enteros Provenientes de la Teoría de Representaciones de Carcajes.....	41
Polinomios matriciales de Sobolev aplicados a la aproximación de funciones matriciales	43
Un estudio discreto sobre la evolución del continuo: la antigüedad, la Revolución Científica y la Edad Contemporánea.....	45
On the Global Regularity of the Navier-Stokes Equations.....	62
Simetría Áurea Prima: Una Partición Dorada Ciclotómica.....	65
Ecuaciones de tipo Kirchhoff con crecimiento exponencial.....	68
Un método Newton Inexacto para resolver la ecuación cuadrática matricial.....	70
Conjuntos producto pequeños en grupos metacíclicos de orden par.....	72
Una extensión de las funciones de complementariedad al espacio real tridimensional....	74
The nonsingularity assumption in Newton's method for solving the nonlinear complementarity problema.....	76
Caracterización de dos Modelos Matemáticos para l Dinámica Tumor-Sistema Inmune en cáncer de mama.....	78

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Estructuras dinámicas para los fenómenos de incremento de periodo y adición de periodo en mapas lineales discontinuos.....	82
Método Galerkin-ondículas en la solución de EDP.....	84
A nonsmooth global quasi-Newton algorithm for nondifferentiable equations.....	87
Las matemáticas detrás de los filtros de Instagram.....	89
Algunos contextos del Sistema Depredador – Presa.....	91
Análisis biparamétrico de la degradación de la tasa de infección del Aedes Densovirus (AeDNV) y la tasa crecimiento natural de mosquitos Aedes Aegypti.....	93
Limit Cycle Bifurcations from Periodic Integral Manifolds in Non-Smooth Ordinary Differential Equations.....	96
Diferenciación numérica por cociente de diferencia bilateral y métodos de elementos finitos en problema inverso elípticos.....	98
Múltiple bifurcación de Hopf en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower.....	100
Explorando el método de Identificación Dispersa de Dinámicas No Lineales (SINDy) en datos con diferentes niveles de ruido.....	102
<b>COMUNICACIONES ESTADÍSTICA.....</b>	104
Analysis of mortality curves using function-on-partially functional regression models for proportional data.....	105
Entre sonidos y datos: Explorando comportamientos de escucha musical con ciencia de datos.....	107
Aplicación de órdenes estocásticos a la teoría de confiabilidad.....	117
Riesgo y Resiliencia Fiscal del Cauca: El Papel de los Cultivos Ilícitos en la Economía Regional.....	121
Fragilidad estatal en América Latina: una mirada a partir del STATIS.....	124
Análisis de datos funcionales para el estudio de curvas de Covid-19 en Colombia.....	126
Modelado Matemático de la Interacción entre Tumores y el Sistema Inmunológico con Consideración de Retardos Temporales.....	128
Comprensión estadística del Objetivo número 1 de la Agenda 2030 Fin de la Pobreza en Colombia.....	132
Identificación de factores socioambientales, económicos, culturales y académicos que inciden en la conciencia ambiental utilizando metodología multivariada institución educativa general Anzoátegui.....	134
Análisis espacial de los niveles de desempeño en competencias genéricas de las pruebas Saber Pro-2023 por departamentos en Colombia.....	136
Comunicar con datos: uso de R y Quarto para la visualización narrativa en investigación formativa.....	138
Indicadores multivariados para determinar factores socioculturales y tecnológicos en sistema silvopastoriles ganaderos en fincas Honda, Tolima.....	140
Convergencia en la distancia de Mallows de cadenas de Markov de cola pesada.....	142
Programación No Lineal en Estadística: Análisis de una aplicación.....	145
<b>COMUNICACIONES EDUCACIÓN MATEMÁTICA.....</b>	146

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Inteligencia Artificial y Educación Matemática: algunas tendencias de trabajo a partir de una revisión a la literatura.....	147
La inteligencia artificial como herramienta generativa para comprender las emociones en las redes sociales implementando la Teoría de Grafos.....	156
Propuesta de aprendizaje apoyada en TIC para potenciar el razonamiento cuantitativo en el programa de Tecnología en Gestión Humana Dual de la Universidad Autónoma de Bucaramanga.....	158
Implementación de estrategias pedagógicas en la enseñanza de matemáticas para estudiantes con dificultades auditivas: antecedentes teóricos y prácticos.....	160
Fortalecimiento de la transposición semiótica en la enseñanza de los números decimales mediante un Objeto Virtual de Aprendizaje.....	163
<b>PÓSTERES MATEMÁTICAS.....</b>	165
Álgebra de Clifford y Cálculo geométrico.....	166
Ciclos Límite Bifurcando de un Toro Isócrono en $\mathbb{R}^3$ .....	167
Modelado 1D del Cáncer Cerebral con Radioterapia: Una Comparación entre Diferencias Finitas y el Método Espectral Galerkin.....	169
Polinomios de Laguerre multiplicativos.....	171
Solución de la ecuación diferencial fraccionaria conformable de Jacobi.....	173
Teorema de la Comparación en Superficies de $\mathbb{R}^3$ .....	175
<b>PÓSTERES ESTADÍSTICA.....</b>	177
Análisis de la Contaminación Ambiental en Bogotá como función del Crecimiento Poblacional y Económico.....	178
Determinantes del desempeño académico en el Tolima: Evidencias desde los datos de las pruebas Saber 11°, 2024.....	180
Estudio exploratorio del desempeño académico en las pruebas Saber 11 en el Departamento del Tolima (2020-2023): Identificación de áreas clave para el fortalecimiento educativo.....	182
Evaluación Espaciotemporal de Incendios Forestales y Recuperación de Bosques Nativos en la Región de Ñuble (Chile).....	184
Introducción al Machine Learning con el lenguaje R: una experiencia en semillero de investigación con datos abiertos forestales.....	186
Modelos de Clasificación en Minería de Datos: Aplicación a datos de Olimpiadas Regionales Matemáticas-UT.....	188
Pandemia e incidencia académica en los programas de pregrado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales periodo 2020-2022).....	190
¿Por qué no hacen turismo interno los colombianos?.....	193
Relación entre la gestión de recursos y la calidad de la Educación media en Colombia....	195

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## PRESENTACIÓN

El XIII Encuentro Nacional de Matemáticas y Estadística (XIII ENME-UT), realizado del 3 al 5 de septiembre de 2025, fue organizado por el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Facultad de Ciencias de la Universidad del Tolima. Su propósito fue fortalecer la proyección del Departamento ante la comunidad académica nacional e internacional, fomentar la interacción con otras instituciones y promover el intercambio de conocimientos y resultados de investigación con diversos grupos de las áreas de las Matemáticas y la Estadística. Este evento anual reunió a la comunidad nacional e internacional en torno a estas disciplinas, creando un espacio propicio para que académicos y profesionales de diversas áreas compartieran y exploraran los trabajos de investigadores y expertos en matemáticas, estadística y educación matemática. En esta edición contamos nuevamente con la valiosa participación de invitados nacionales e internacionales, quienes enriquecieron el encuentro con sus conocimientos y experiencias:

### **Maura Vásquez**

*Doctora en Estadística (Universidad de Salamanca, España).*

*Profesora Titular e Investigadora del Postgrado de Estadística y Actuariado de la Universidad Central de Venezuela.*

### **Daira Velandia Muñoz**

*Doctora en Estadística de la Universidad de Valparaíso, Chile.*

*Coordinadora de Postítulos del Instituto de Estadística de la Universidad de Valparaíso (IDEUV), Chile*

### **Daniela Paiva Peñuela**

*Doctora en Matemáticas del Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brasil.*

*Investigadora posdoctoral en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), en Río de Janeiro, Brasil.*

### **Guillermo Ramírez**

*Doctor en Estadística por la Universidad de Salamanca, España.*

*Profesor Titular y Coordinador del Área de Postgrado de Estadística y Actuariado en la Universidad Central de Venezuela.*

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**Jorge P. Zubelli**

*Doctor en Matemáticas Aplicadas de la Universidad de California en Berkeley, EE. UU.  
Profesor en Khalifa University of Science Technology: Abu Dhabi, Abu Dhabi, AE.*

**Brian David Vásquez Campos**

*Doctor en Matemáticas del Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brasil.*

**Anton Arnold Oostra Van Noppen**

*Doctor en Ciencias-Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia*

Durante el XIII ENME-UT se ofrecieron cuatro cursillos, cada uno de tres sesiones de hora y media, dos en matemáticas y dos en estadística:

- *Una introducción a la Geometría Algebraica* — Daniela Paiva
- *Espacios Vectoriales Topológicos* — Brian Vásquez Campos
- *Árboles de clasificación y regresión* — Maura Vásquez y Guillermo Ramírez
- *Introducción al modelado espacio-temporal de datos satelitales* — Daira Velandia

Asimismo, se llevaron a cabo cuatro conferencias magistrales:

- *Retículos de sublógicas intuicionistas y clásicas* — Dr. Arnold Oostra
- *Effective Sample Size Under Infill Domain Asymptotics* — Dra. Daira Velandia
- *On a Surprising Connection between Finance and Soliton Equations* — Dr. Jorge Passamani
- *Estudiando automorfismos de superficies cuárticas en  $P^3$*  — Dra. Daniela Paiva

En este libro de memorias se recopilan los resúmenes de las diversas actividades que se llevaron a cabo durante el XIII Encuentro Nacional de Matemáticas y Estadística, evento que continúa consolidándose como un espacio clave para el fortalecimiento de la comunidad académica en estas disciplinas.

Confiamos en que estas memorias no solo constituyan el registro del encuentro, sino que también se conviertan en una referencia que motive nuevas investigaciones y futuras colaboraciones.

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**PROGRAMACIÓN  
GENERAL**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

MIÉRCOLES 3 DE SEPTIEMBRE		
HORARIO	ACTIVIDAD	
08:00 AM. a 08:50 AM.	Registro	
08:50 AM. a 09:40 AM	Ceremonia Inaugural	
09:40 AM. a 10:30 AM.	<b>Conferencia Inaugural:</b> Retículos de sublógicas intuicionistas y clásicas <b>Dr. Arnold Ostra</b>	
10:30 AM. a 10:50 AM.	Receso	
10:50 AM. a 11:40 AM	Effective Sample Size Under Infill Domain Asymptotics <b>Dra. Daira Velandia</b>	
11:40 AM a 02:00 PM.	Receso	
02:00 PM a 03:45 PM	<b>Cursillo (A)</b>	
02:00 PM a 03:45 PM	Una introducción a la Geometría Algebraica <b>Dra. Daniela Paiva</b>	Árboles de clasificación y regresión <b>Dra. Maura Vásquez y Dr. Guillermo Ramírez</b>
03:45 PM a 04:00 PM	Receso	
04:00 PM a 05:45 PM	<b>Cursillo (B)</b>	
04:00 PM a 05:45 PM	Espacios Vectoriales Topológicos <b>Dr. Brian Vásquez Campos</b>	Introducción al modelado espacio-temporal de datos satelitales <b>Dra. Daira Velandia</b>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

JUEVES 4 DE SEPTIEMBRE		
HORARIO	ACTIVIDAD	
08:00 AM. a 08:40 AM	On a Surprising Connection between Finance and Soliton Equations <b>Dr. Jorge Passamani</b> <a href="https://meet.google.com/pko-qkgg-moe">https://meet.google.com/pko-qkgg-moe</a>	
08:45 AM. a 10:15 AM.	<b>Cursillo (B)</b>	
08:45 AM. a 10:15 AM	Espacios Vectoriales Topológicos <b>Dr. Brian Vásquez Campos</b>	Introducción al modelado espacio-temporal de datos satelitales <b>Dra. Daira Velandia</b>
10:15 AM. a 10:30 AM	Receso	
10.30 AM. a 12:15 AM	<b>Cursillo (A)</b>	
10.30 AM. a 12:15 AM	Una introducción a la Geometría Algebraica <b>Dra. Daniela Paiva</b>	Árboles de clasificación y regresión <b>Dra. Maura Vásquez y Dr. Guillermo Ramírez</b>
12:15 PM a 02:00 PM	Receso	
2:00 PM a 4:00 PM	<b>Comunicaciones: Matemáticas 1</b>	<b>Comunicaciones: Matemáticas 2</b>
2:00 PM a 2:20 PM	Cálculo de la transformada de Laplace multiplicativa inversa a través de series de Laguerre multiplicativas <b>Edinson Fuentes</b>	Ecuaciones de tipo Kirchhoff con crecimiento Exponencial <b>Jesús Alberto León Tordecilla</b>
2:20 PM a 2:40 PM	Relación entre grafos y conjuntos diferencia <b>Fernando Andrés Benavides Agredo, Wilson Fernando Mutis Cantero</b>	Un método Newton Inexacto para resolver la ecuación cuadrática matricial <b>Eduard Mauricio Macías Caicedo, Rosana Pérez Mera</b>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

JUEVES 4 DE SEPTIEMBRE		
HORARIO	ACTIVIDAD	
2:00 PM a 4:00 PM	<b>Comunicaciones: Matemáticas 1</b>	<b>Comunicaciones: Matemáticas 2</b>
2:40 PM a 3:00 PM	Explorando Topologías de Progresiones Aritmética y Algunas Generalizaciones <b>Kevin Stiven Carmona Alemán, Nidia Yadira Caicedo Bravo, Jhonny Carpiediem Gómez</b>	Conjuntos producto pequeños en grupos metacíclicos de orden par <b>Wilson Fernando Mutis Cantero, Fernando Andrés Benavides Agredo</b>
3:00 PM a 3:20 PM	Una demostración del Teorema de Rolle a la Carathéodory <b>Simeón Casanova Trujillo</b>	Una extensión de las funciones de complementariedad al espacio real tridimensional <b>Carlos Eduardo Ordoñez, Jhon Alexander Salazar, Carlos Andrés Arias</b>
3:20 PM a 3:40 PM	Aplicaciones de la Geometría Algebraica en Redes de Reacción <b>Astrid Liliana Contreras Mendoza</b>	The nonsingularity assumption in Newton's method for solving the nonlinear complementarity problema <b>Wilmer Sánchez Grueso, Carlos Andrés Arias, Rosana Pérez</b>
3:40 PM a 4:00 PM	Estudio de la dinámica suave y no suave de una variación del modelo epidemiológico SIR <b>Germán Fabian Escobar Fiesco, Julio C. Duarte V., Oscar M. Londoño D.</b>	Caracterización de dos Modelos Matemáticos para la Dinámica Tumor-Sistema Inmune en cáncer de mama <b>Juan Andrés Reyes Olivarez, Daniel Felipe Tavera Castaño, Alexander Santos Niño</b>
04:00 PM a 04:20 PM	Receso	

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

JUEVES 4 DE SEPTIEMBRE		
HORARIO	ACTIVIDAD	
4:20 PM a 6:00 PM	Comunicaciones: Matemáticas 1	Comunicaciones: Matemáticas 2
4:20 PM a 4:40 PM	Algunas Sucesiones de Números Enteros Provenientes de la Teoría de Representaciones de Carcajes <b>Pedro Fernando Fernández Espinosa</b>	Estructuras dinámicas para los fenómenos de incremento de periodo y adición de periodo en mapas lineales discontinuos <b>Juan Carlos Vargas Bernal, Simeón Casanova Trujillo</b>
4:40 PM a 5:00 PM	Polinomios matriciales de Sobolev aplicados a la aproximación de funciones matriciales <b>Edinson Fuentes</b>	Método Galerkin-ondículas en la solución de EDP <b>Jairo Alberto Villegas Gutiérrez</b>
5:00 PM a 5:20 PM	Un estudio discreto sobre la evolución del continuo: antigüedad, la Revolución Científica y la Edad Contemporánea <b>María Fernanda Zárate Ortega, Sofía Barrios Zamudio, César Guillermo Rendón Mayorga</b>	A nonsmooth global quasi-Newton algorithm for nondifferentiable equations <b>Hevert Vivas, Carlos Andrés Arias, Rosana Pérez</b>
5:20 PM a 5:40 PM	On the Global Regularity of the Navier-Stokes Equations <b>Brian David Vásquez Campos</b>	Las matemáticas detrás de los filtros de Instagram <b>Michael Alejandro Zambrano Prado, William Jiménez Gómez</b>
5:40 PM a 6: 00 PM	Simetría Áurea Prima: Una Partición Dorada Ciclotómica <b>Javier Grisales Herrera</b>	Algunos contextos del Sistema Depredador – Presa <b>Luz Amparo Ibarra Tole, Héctor Andrés Granada Díaz, Pablo Emilio Calderón Saavedra</b>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

JUEVES 4 DE SEPTIEMBRE		
HORARIO	ACTIVIDAD	
2:00 PM a 3:20 PM	<b>Comunicaciones: Estadística</b>	<b>Comunicaciones: Educación Matemática y/o estadística</b>
2:00 PM a 2:20 PM	<p>Analysis of mortality curves using function-on-partial functional regression models for proportional data</p> <p><b>Julián Alfonso Acuña Collazos, Marcelo C. Medeiros, Yuri Tatiana Ospina Usaquén</b></p>	<p>Inteligencia Artificial y Educación Matemática: algunas tendencias de trabajo a partir de una revisión a la literatura</p> <p><b>Michael Andrés Barreto Pinilla, Brandon Yesid Pérez Moreno</b></p>
2:20 PM a 2:40 PM	<p>Entre sonidos y datos: Explorando comportamientos de escucha musical con ciencia de datos</p> <p><b>Johan Santiago Cárdenas Román, César Guillermo Rendón Mayorga</b></p>	<p>La inteligencia artificial como herramienta generativa para comprender las emociones en las redes sociales implementando la Teoría de Grafos</p> <p><b>Jakeline Amparo Villota Enríquez, Dora Alexandra Villota Enríquez</b></p>
2:40 PM a 3:00 PM	<p>Aplicación de órdenes estocásticos a la teoría de confiabilidad</p> <p><b>Ferney Anturi Vargas, Luis Alberto Oviedo Plazas</b></p>	<p>Propuesta de aprendizaje apoyada en TIC para potenciar el razonamiento cuantitativo en el programa de Tecnología en Gestión Humana Dual de la Universidad Autónoma de Bucaramanga</p> <p><b>Jairo Gómez Moncada, Eddy Johana Fajardo Ortiz, Luzdari Rangel Ruiz</b></p>
3:00 PM a 3:20 PM	<p>Riesgo y Resiliencia Fiscal del Cauca: El Papel de los Cultivos Ilícitos en la Economía Regional</p> <p><b>Mauren Dayanna López Salazar, Wilmer Alexander Arévalo Estrada</b></p>	<p>Implementación de estrategias pedagógicas en la enseñanza de matemáticas para estudiantes con dificultades auditivas: antecedentes teóricos y prácticos</p> <p><b>Magda Lorena Martínez Sicachá</b></p>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

JUEVES 4 DE SEPTIEMBRE		
<b>HORARIO</b>	<b>ACTIVIDAD</b>	
3:20 PM a 4:00 PM	<b>Comunicaciones: Estadística</b>	<b>Comunicaciones: Educación Matemática y/o estadística</b>
3:20 PM a 3:40 PM	Fragilidad estatal en América Latina: una mirada a partir del STATIS <b>Eddy Johanna Fajardo Ortíz, Héctor Romero, Deicy Villalba Rey</b>	Fortalecimiento de la transposición semiótica en la enseñanza de los números decimales mediante un Objeto Virtual de Aprendizaje <b>Liliana Mercedes Guerrero Lasso, Alfredo Imer Rodríguez Mora, Luis Carlos Rojas Flórez</b>
3:40 PM a 4:00 PM	Análisis de datos funcionales para el estudio de curvas de Covid-19 en Colombia <b>Julián Alfonso Acuña Collazos, Andrés Eduardo Orellano</b>	
04:00 PM a 04:20 PM	Receso	
04:20 PM a 6:00 PM	<b>Comunicaciones: Estadística</b>	
04:20 PM a 4:40 PM	Modelado Matemático de la Interacción entre Tumores y el Sistema Inmunológico con Consideración de Retardos Temporales <b>Jeimy Leandra Moyano Ruiz, Carolina Ballesteros Velásquez, Alexander Santos Niño</b>	
04:40 PM a 5:00 PM	Comprensión estadística del Objetivo número 1 de la Agenda 2030 Fin de la Pobreza en Colombia <b>Edgar Gutiérrez, Javier Sierra Jaimes, Juan Carlos Bautista, Kevin García, Astrid Liliana Contreras Mendoza</b>	
5:00 PM a 5:20 PM	Identificación de factores socioambientales, económicos, culturales y académicos que inciden en la conciencia ambiental utilizando metodología multivariada institución educativa general Anzoátegui <b>Edwar Janeyder Zamora Rodríguez, Miguel Rodríguez Márquez</b>	
5:20 PM a 5:40 PM	Análisis espacial de los niveles de desempeño en competencias genéricas de las pruebas Saber Pro-2023 por departamentos en Colombia <b>Miguel Armando Rodríguez Márquez, Joaquín González Borja</b>	
5:40 PM a 6:00 PM	Comunicar con datos: uso de R y Quarto para la visualización narrativa en investigación formativa <b>Linda Yicel Sandoval Rubio, Julie Kimberly Ramírez Briñez</b>	

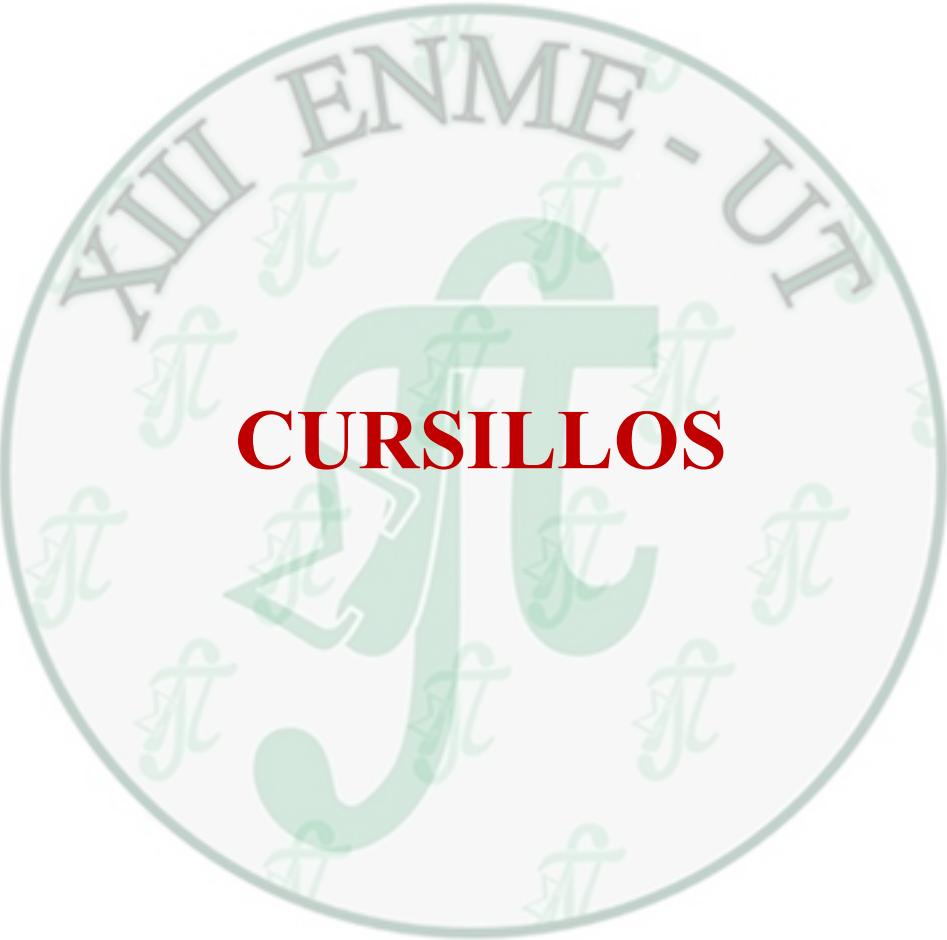
# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

VIERNES 5 DE SEPTIEMBRE		
<b>HORARIO</b>	<b>ACTIVIDAD</b>	
08:00 AM. a 09:30 AM.	<b>Cursillo (A)</b>	
08:00 AM. a 09:30 AM	Una introducción a la Geometría Algebraica <b>Dra. Daniela Paiva</b>	Árboles de clasificación y regresión <b>Dra. Maura Vásquez y Dr. Guillermo Ramírez</b>
09:30 AM. a 09:45 AM	Receso	
09:45 AM. a 11:15 AM	<b>Cursillo (B)</b>	
09:45 AM. a 11:15 AM	Espacios Vectoriales Topológicos <b>Dr. Brian Vásquez Campos</b>	Introducción al modelado espacio-temporal de datos satelitales <b>Dra. Daira Velandia</b>
11:20 AM a 12:20 PM	Comunicaciones: Matemáticas 1	Comunicaciones: Matemáticas 2
11:20 AM a 11:40 AM	Análisis biparamétrico de la degradación de la tasa de infección del Aedes Densovirus (AeDNV) y la tasa crecimiento natural de mosquitos Aedes Aegypti <b>Héctor Andrés Granada Díaz, Luis Eduardo Olivar Robayo, Manuel Arturo Nova Martínez</b>	Múltiple bifurcación de Hopf en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower <b>Paulo Cesar Tintinago Ruiz, Leonardo Duvan Restrepo Alape</b>
11:40 AM a 12:00 PM	Limit Cycle Bifurcations from Periodic Integral Manifolds in Non-Smooth Ordinary Differential Equations <b>Oscar Alexander Ramírez Cespedes</b>	Explorando el método de Identificación Dispersa de Dinámicas No Lineales (SINDy) en datos con diferentes niveles de ruido <b>Melhany Garay Román, César Augusto Acosta Minoli</b>
12:00 PM a 12:20 PM	Diferenciación numérica por cociente de diferencia bilateral y métodos de elementos finitos en problemas inversos elípticos <b>Luis Eduardo Olivar Robayo, Héctor Andrés Granada Díaz</b>	

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

VIERNES 5 DE SEPTIEMBRE		
HORARIO	ACTIVIDAD	
11:20 AM a 12:00 PM	<b>Comunicaciones: Estadística 1</b>	<b>Comunicaciones: Estadística 2</b>
11:20 AM a 11:40 AM	Indicadores multivariados para determinar factores socioculturales y tecnológicos en sistema silvopastoriles ganaderos en fincas Honda, Tolima <b>Sonia Benítez Oviedo, Miguel Armando Rodríguez Márquez, Jairo Mora Delgado, Rocío Pérez Rubio</b>	Programación No Lineal en Estadística: Análisis de una aplicación <b>Alfonso Sánchez Hernández</b>
11:40 AM a 12:00 PM	Convergencia en la distancia de Mallows de cadenas de Markov de cola pesada <b>Marta Lizeth Calvache Hoyos</b>	Análisis de la efectividad de los pronósticos utilizando modelos de aprendizaje profundo para series de tiempo de la economía colombiana <b>Johanna Lizeth Bustos González, Joaquín González Borja</b>
12:00 PM a 2:00 PM	Receso	
02:00 PM a 03:30 PM	Sesión de Pósteres	
03:30 PM a 04:20 PM	<b>Conferencia de Cierre</b> Estudiando automorfismos de superficies cuárticas en $P^3$ <b>Dra. Daniela Paiva</b>	
04:20 PM a 05:30 PM	Palabras de Cierre y Acto Cultural	

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA



**CURSILLOS**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Introducción al Modelado Espacio-Temporal de Datos Satelitales

DAIRA VELANDIA MUÑOZ

Universidad de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

e.mail: daira.velandia@uv.cl

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

En este cursillo se presentará una introducción general al modelado espacio-temporal, destacando su relevancia en el análisis de datos satelitales. Este enfoque permite integrar información espacial y temporal de manera conjunta, lo que resulta fundamental para comprender fenómenos dinámicos como el cambio climático, la deforestación, el monitoreo agrícola y la gestión de recursos naturales.

Se abordarán los conceptos de autocorrelación espacial, dependencia temporal y la interacción entre ambas dimensiones, utilizando ejemplos prácticos basados en datos satelitales. Asimismo, se revisarán diversas aplicaciones del modelado espacio-temporal en contextos ambientales y geográficos, incluyendo estudios de predicción de patrones climáticos, monitoreo de cultivos, detección de cambios en la cobertura terrestre y análisis de incendios forestales en Chile. En este último caso, se mostrará cómo el modelado espacio-temporal permite anticipar áreas de riesgo, evaluar la propagación del fuego y optimizar estrategias de respuesta ante emergencias.

Finalmente, se ilustrará el uso de herramientas computacionales, en particular Python, para la implementación de modelos y análisis espacio-temporales, destacando su potencial en la investigación aplicada y la toma de decisiones basadas en evidencia.

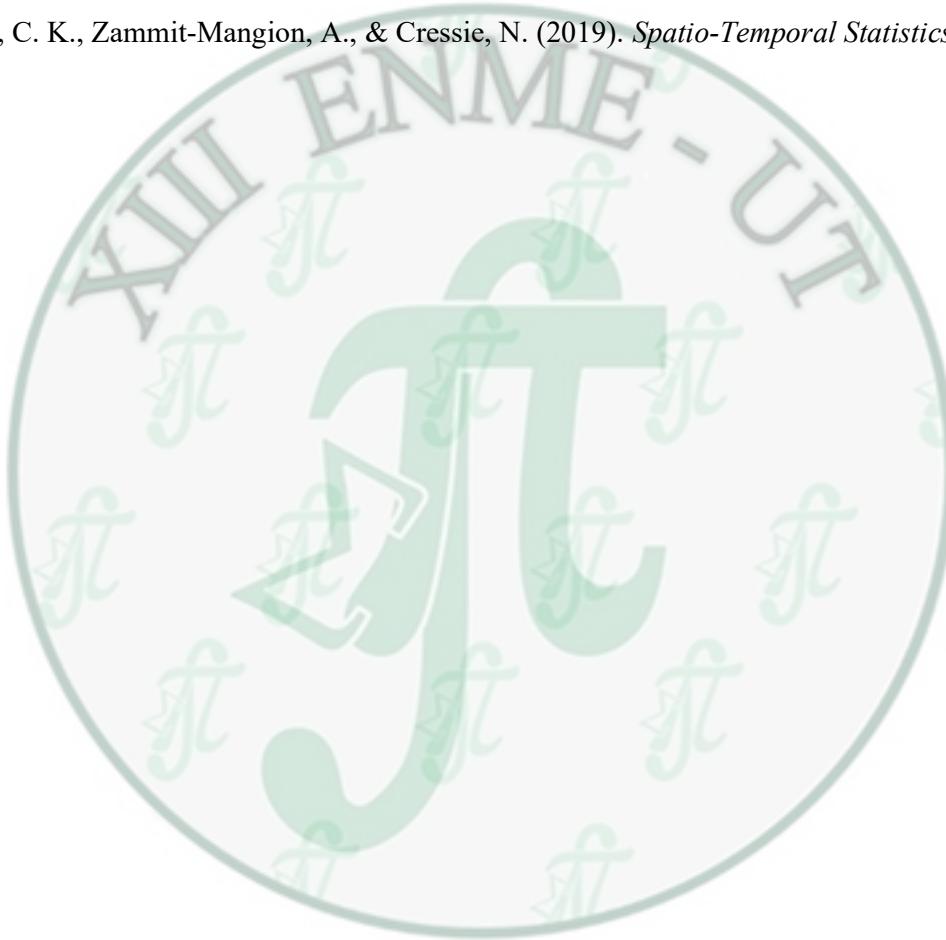
Este cursillo busca ofrecer una visión integral de las metodologías y aplicaciones del modelado espacio-temporal, subrayando su papel transformador en el estudio de fenómenos observados mediante datos satelitales.

### Palabras claves

Modelado espacio-temporal, Datos satelitales, Análisis ambiental

## Referencias

- Cressie, N., & Wikle, C. K. (2011). *Statistics for Spatio-Temporal Data*. Wiley.
- Pebesma, E., & Bivand, R. (2023). *Spatial Data Science with R and Python*. CRC Press.
- Chuvieco, E. (2016). *Fundamentals of Satellite Remote Sensing: An Environmental Approach*. CRC Press.
- Velandia, D.; Pozo, D.; Vargas, B.; Sigel, P. «Spatio-temporal analysis of drought variability in Chile». In *International Conference on Data Science (ICDS) 2023* abstracts.
- Wikle, C. K., Zammit-Mangion, A., & Cressie, N. (2019). *Spatio-Temporal Statistics with R*.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## ÁRBOLES DE REGRESIÓN Y CLASIFICACIÓN

MAURA VÁSQUEZ – GUILLERMO RAMÍREZ

Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela

maura.vasquez@gmail.com; guillermo.ramirez.ucv@gmail.com

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

El cursillo “Árboles de Regresión y Clasificación” tiene como propósito introducir a los participantes en los fundamentos teóricos y prácticos de los modelos basados en árboles de decisión y de regresión, herramientas fundamentales dentro del aprendizaje estadístico y la minería de datos. A lo largo de las clases, se abordan los principios esenciales que sustentan la construcción, interpretación y validación de estos modelos, con énfasis en su aplicabilidad en contextos de predicción y clasificación.

El desarrollo del curso contempla el estudio de la estructura jerárquica de los árboles de decisión, los criterios de partición y las medidas de pureza, así como la diferenciación conceptual entre los árboles de clasificación y los árboles de regresión. Se analizan estrategias de evaluación y optimización, incluyendo la selección de muestras de entrenamiento y prueba, la validación cruzada y los métodos de ensamble, con especial atención al algoritmo Random Forest, reconocido por su capacidad para mejorar la precisión y la estabilidad de los modelos predictivos.

El enfoque pedagógico combina la exposición conceptual con la práctica aplicada mediante conjuntos de datos reales, tales como Carseats y Boston, lo cual permite fortalecer las competencias analíticas de los participantes

De este modo, el curso contribuye al desarrollo de habilidades en análisis de datos, aprendizaje automático y toma de decisiones basadas en evidencia empírica, pilares fundamentales en la investigación estadística moderna y en la práctica profesional contemporánea.

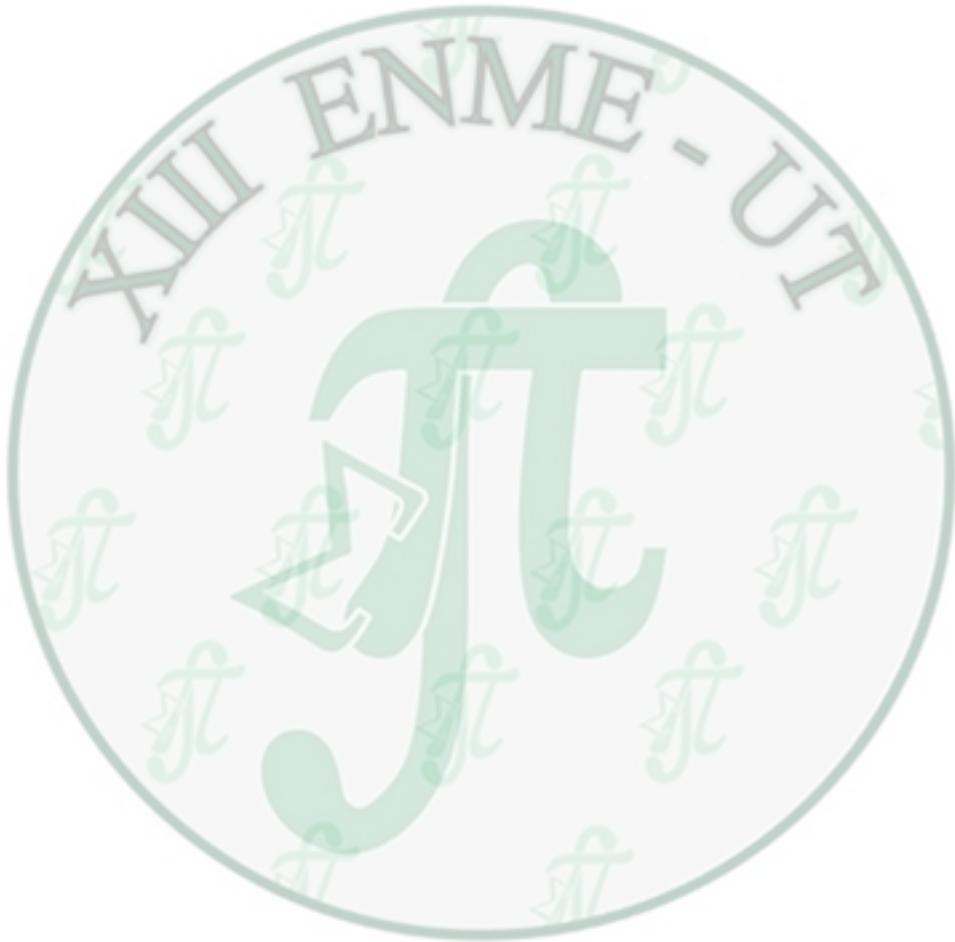
### Palabras claves

Aprendizaje automático; Árboles de decisión; Clasificación; Modelos predictivos; Árboles de Regresión.

### Referencias

- [1] Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A., y Stone, C. J. (1984). Classification and regression trees. Wadsworth International Group.
- [2] Hastie, T., Tibshirani, R., y Friedman, J. (2009). The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction (2nd ed.). Springer.

- [3] James, G., Witten, D., Hastie, T., y Tibshirani, R. (2021). An introduction to statistical learning: With applications in R (2nd ed.). Springer.
- [4] Kuhn, M., & Johnson, K. (2013). Applied predictive modeling. Springer.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Una Introducción a la Geometría Algebraica

DANIELA PAIVA

Instituto de Matemática Pura y Aplicada – IMPA, Brasil

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Este minicurso tiene como objetivo introducir a los asistentes, especialmente a estudiantes de pregrado, en los conceptos fundamentales de la geometría algebraica, mostrando cómo el estudio de ecuaciones polinómicas permite construir y comprender objetos geométricos de gran riqueza teórica y con aplicaciones en múltiples áreas de las matemáticas.

Se iniciará con una introducción general a la disciplina, resaltando la motivación central: asociar a un conjunto de polinomios su lugar de ceros y estudiar sus propiedades geométricas y algebraicas. El enfoque inicial se centrará en las variedades afines, presentando su definición y ejemplos básicos.

Posteriormente, se abordará el Teorema de los ceros de Hilbert, que establece el puente entre la geometría (conjuntos de ceros de polinomios) y el álgebra (ideales en anillos de polinomios). A partir de ello, se introducirán nociones como la dimensión de una variedad y la caracterización de los puntos suaves y singulares.

La atención se dirigirá luego a las variedades afines de dimensión uno —curvas algebraicas—, estudiando sus propiedades locales mediante el análisis de las rectas tangentes, lo que permitirá exemplificar la interacción entre álgebra y geometría en situaciones concretas.

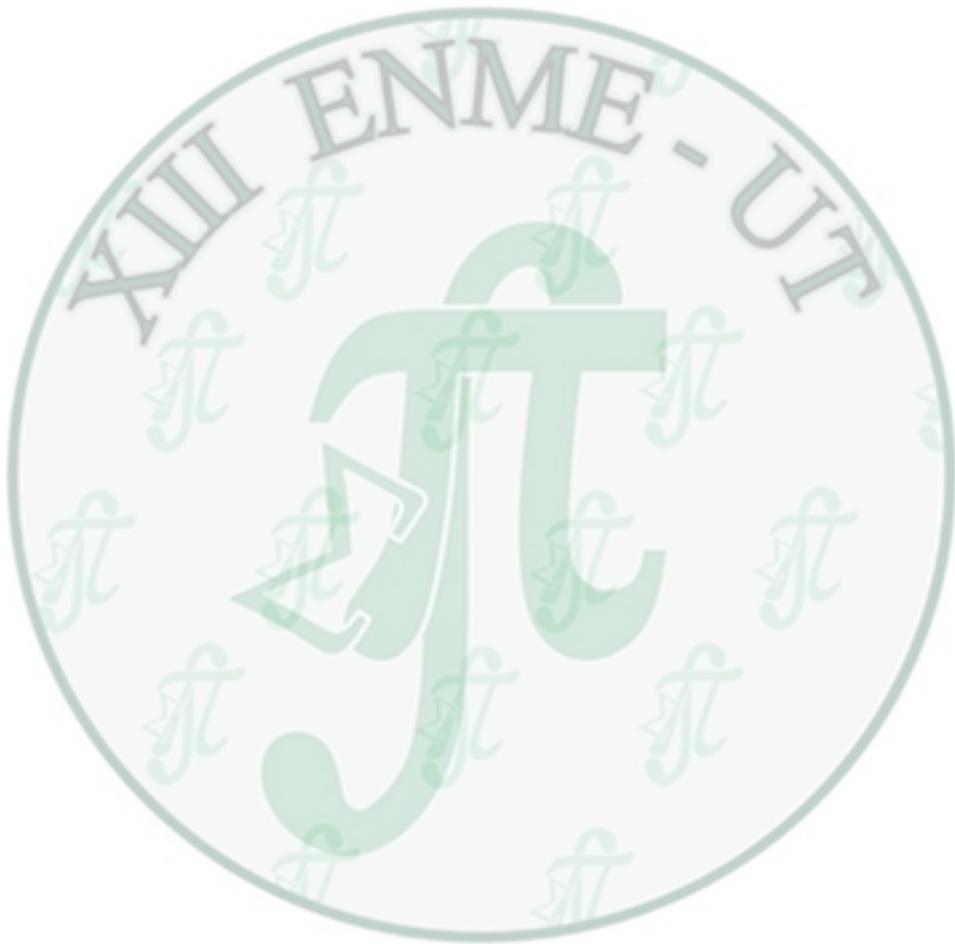
En la parte final, se ofrecerá una breve introducción a las variedades proyectivas, destacando su importancia en el estudio de la geometría algebraica moderna, al permitir tratar objetos más completos y evitar “pérdidas de información en el infinito”.

El minicurso concluirá con una panorámica de aplicaciones y conexiones de la geometría algebraica con otras ramas, tales como la teoría de números, la geometría aritmética, la geometría enumerativa, la geometría birracional y la criptografía.

### Referencias

- [1] Fulton, William. *Algebraic curves*, An Introduction to Algebraic Geom 54 (2008).

- [2] Gathmann, Andreas. *Algebraica geometry*, Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern. <https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/> alggeom-2021/alggeom-2021.pdf, (2024).
- [3] Hartshorne, Robin. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).
- [4] Ivorra Castillo, Castillo. *Geometría algebraica*, Universidad de Valencia. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/GA.pdf>(2023).
- [5] Shafarevich, Igor. *Basic algebraic geometry I*, Berlin: Springer-Verlag (1994).



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Espacios Vectoriales Topológicos

Brian David Vasquez Campos

bdvasquezc@ut.edu.co

University of Tolima

### Palabras clave

Espacios vectoriales topológicos, análisis funcional, topología lineal, convexidad local, continuidad.

### Resumen

Este cursillo introduce los fundamentos de los espacios vectoriales topológicos, estructuras que extienden los espacios normados y permiten estudiar continuidad, convergencia y dualidad en un contexto más general. Se abordarán las nociones básicas de topología lineal, convexidad local y continuidad de las operaciones, junto con ejemplos representativos. Además, se discutirán resultados clásicos como el teorema de Hahn–Banach y el de Alaoglu, resaltando su relevancia en análisis funcional y teoría de operadores. El cursillo está dirigido a estudiantes interesados en adquirir una visión moderna y estructurada del análisis moderno.

### Referencias

- [Bou03] N. Bourbaki. *Elements of mathematics. Topological vector spaces. Chapters 1–5*. Transl. from the French by H. G. Eggleston and S. Madan. Berlin: Springer, softcover printing of the 1st English edition of 1987 edition, 2003.
- [Bou07] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5*. Berlin: Springer, reprint of the 1981 original edition, 2007.
- [Con90] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 2nd edition, 1990.
- [Gro92] A. Grothendieck. *Topological vector spaces. Transl. from the French by Orlando Chaljub*. Philadelphia, PA: Gordon and Breach Science Publishers, 3. ed. edition, 1992.
- [Hor66] John Horváth. Topological vector spaces and distributions. Vol. I. Addison-Wesley Series in Mathematics.) Reading, Mass.-Palo Alto-London- Don Mills, Ontario: Addison-Wesley Publishing Company. XII, 449 p. (1966)., 1966.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1991.
- [SW99] Helmut H. Schaefer and Manfred P. Wolff. *Topological Vector Spaces*. Springer, 2nd edition, 1999.
- [Tr7] François Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, 1967.

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA



**CONFERENCIAS**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Retículos de sublógicas intuicionistas y clásicas

ARNOLD OOSTRA

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [noostra@ut.edu.co](mailto:noostra@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Los gráficos existenciales fueron inventados por Charles S. Peirce hace 130 años para desarrollar la lógica clásica mediante gráficos bidimensionales. Hace 18 años en la Universidad del Tolima se propuso un sistema similar para la lógica intuicionista y desde entonces se han buscado gráficos existenciales para sublógicas determinadas por conectivos, como la lógica implicativa con conjunción y la lógica implicativa. Esto abrió el camino para considerar cada vez más sublógicas del cálculo proposicional intuicionista desde una perspectiva triple: sintaxis, semántica y gráfica. El resultado es un retículo de numerosas sublógicas intuicionistas que actúa como un filtro para determinar la ubicación precisa de cada resultado en términos de los axiomas proposicionales. Este ejercicio representa un caso especial de las *Reverse Mathematics*.

En esta ponencia se mostrará un retículo de sublógicas del cálculo proposicional intuicionista determinadas por subconjuntos de conectivos y se hará un estudio comparativo con el correspondiente retículo para el cálculo proposicional clásico. Este análisis demuestra con claridad que la lógica intuicionista distingue mucho mejor las diferentes proposiciones que la clásica, en especial aquellas en las que interviene la negación.

### Palabras claves

Cálculo proposicional intuicionista, gráficos existenciales, sublógica.

## Referencias

- [1] Calderón, Fauner y Calderón, Mabel (2022). *Gráficos para la lógica implicativa*, trabajo de grado (Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.
- [2] Castillo, Mauricio y Oostra, Arnold (2010). *Álgebras para la lógica implicativa con conjunción*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 18 no. 2, pp. 31–50.
- [3] Gómez, Andrea Yineth (2013). *Gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción*, trabajo de grado (Matemáticas), Ibagué: Universidad del Tolima.
- [4] Oostra, Arnold (2010). *Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista*, Cuadernos de Sistemática Peirceana, 2, pp. 25–60.
- [5] Oostra, Arnold (2021). *Equivalence Proof for Intuitionistic Existential Alpha Graphs*, in: Diagrams 2021, ed. Basu *et al*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 12909, pp. 188–195.
- [6] Oostra, Arnold (2022). *Intuitionistic and Geometrical Extensions of Peirce's Existential Graphs*, in: Advances in Peircean Mathematics. The Colombian School, ed. Zalamea, Berlin, Boston: De Gruyter, pp. 103–178.
- [7] Oostra, Arnold (2023). *Existential Graphs as a Visual Tool of Abductive Cognition in Intuitionistic Logic and Various Sublogics*, in: Handbook of Abductive Cognition, ed. Magnani, Cham (Switzerland): Springer Nature, pp. 647–668.
- [8] Oostra, Arnold (2024). *Implicational Existential Graphs*, in: Diagrams 2024, ed. Lemanski *et al*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 14981, pp. 267–274.
- [9] Peirce, Charles S. (1931-1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, ed. Hartshorne, Weiss and Burks, Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press.
- [10] Peirce, Charles S. (2020-2023). *Logic of the Future*, ed. Pietarinen. Berlin, Boston: De Gruyter.
- [11] Roberts, Don D. (1973). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton.
- [12] Zalamea, Fernando (2010). *Los gráficos existenciales peirceanos*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- [13] Zeman, J. Jay (1964). *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, tesis doctoral, Chicago: University of Chicago.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Effective Sample Size Under Infill Domain asymptotics

DAIRA VELANDIA MUÑOZ

Universidad de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

e.mail: daira.velandia@uv.cl

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Abstract

Effective sample size (ESS) indicates the number of equivalent “independent” samples in an autocorrelated sample. In the literature, there are different analytical definitions for ESS. However, they all have in common that it is a function of the covariance matrix. When the latter is obtained from a parametric covariance function that satisfies the regularity conditions established in Mardia & Marshall (1984), it has been studied for the definitions given by Griffith (2005) and Vallejos & Osorio (2014) under the increasing domain approach the estimation of ESS is consistent and asymptotically Normal. In this paper, we study the properties of the ESS estimators under an asymptotic infill scheme, showing that none of the previous estimators is consistent. This last is directly related to the fact that the spatial range parameter cannot be estimated consistently under the infill asymptotic scheme. Moreover, we show that under the Matérn covariance function, the ESS is upper bounded even when the sample size tends to infinity, which explains the inconsistency in the estimation of the rank parameter. Finally, this article provides an alternative definition of ESS, which is a function of the micro-ergodic parameter when considering the maximum likelihood estimation with data from a Gaussian process with an exponential covariance model under the fixed-domain asymptotic approach, and thus obtaining a consistent estimator of ESS. Simulation experiments were developed to evaluate the approximations provided by the proposed ESS and its computational cost.

## Keywords

Effective Sample Size (ESS), Spatial Statistics, Gaussian Processes, Infill Asymptotic, Covariance Function

## References

- [1] Mardia, K. V., & Marshall, R. J. (1984). Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, 71(1), 135–146.
- [2] Griffith, D. A. (2005). Effective geographic sample size in the presence of spatial autocorrelation. *Annals of the Association of American Geographers*, 95(4), 740–760.
- [3] Vallejos, R., & Osorio, F. (2014). Effective sample size for spatially correlated data. *Environmetrics*, 25(8), 620–631.
- [4] Velandia, D., Bachoc, F., Bevilacqua, M. “Composite likelihood estimation for a Gaussian process under fixed domain asymptotics”. *Journal of Multivariate Analysis*, 2019
- [5] Zhang, H. (2004). Inconsistent estimation and asymptotically equal interpolations in model-based geostatistics. *Journal of the American Statistical Association*, 99(465), 250–261.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

On a Surprising Connection between Finance and Soliton Equations

JORGE P. ZUBELLI

Khalifa University, Abu Dhabi, Emiratos Árabes Unidos  
e.mail: jorge.zubelli@ku.ac.ae

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Abstract

This is a general audience talk on a very interesting connection between the travelling wave solutions of the Harry Dym equation and the study of local volatility in the context of option pricing in the Black-Scholes model. I will try to make this presentation a general public one. It is based on joint work with V. Albani, Singh, and Kourakis, which is available at <https://arxiv.org/abs/2412.19020>

## Keywords

Local Volatility; Black-Scholes Model; Harry Dym Equation

## References

Albani, V.; Singh, K.; Kourakis, I.; Zubelli, J. P. (2024). *Travelling wave solutions of an equation of Harry Dym type arising in the Black-Scholes framework*. arXiv preprint arXiv:2412.19020. [arXiv](https://arxiv.org/abs/2412.19020)

Black, F. y Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.

Dupire, B. (1994). *Pricing with a smile*. Risk, 7(1), 18-20.

Marco Pedroni, Vincenzo Sciacca, and Jorge P. Zubelli. On the bi-Hamiltonian theory for the Harry Dym equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 133:1585–1597, 2002.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Estudiando automorfismos de superficies cuarticas en  $\mathbb{P}^3$

DANIELA PAIVA

Instituto de Matemática Pura y Aplicada – IMPA, Brasil

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

El problema de Gizatullin consiste en determinar qué automorfismos de una superficie cuártica suave  $S \subset \mathbb{P}^3$  provienen de transformaciones birracionales de  $\mathbb{P}^3$ . Este problema se enmarca en una pregunta más general: caracterizar qué automorfismos de una hipersuperficie en un espacio proyectivo son restricciones de transformaciones proyectivas. Esta pregunta fue resuelta de manera completa por Matsumura–Monsky y Chang, salvo en dos casos: el de una curva elíptica en  $\mathbb{P}^2$ . y el de una superficie cuártica en  $\mathbb{P}^3$ . Para las curvas elípticas se sabe que, aunque sus automorfismos no provienen de transformaciones proyectivas de  $\mathbb{P}^2$ , sí lo hacen de transformaciones birracionales. Por tanto, el único caso abierto corresponde a las superficies cuárticas en  $\mathbb{P}^3$ . A este lo llamamos problema de Gizatullin. En esta charla ofreceré una introducción general a la geometría algebraica, enfocándome en las herramientas empleadas para estudiar los automorfismos de superficies cuarticas. Entre ellas destacan la teoría de las superficies K3 y la geometría biracional. Mostraré cómo la interacción entre estas áreas permite abordar el problema y, en particular, presentaré una solución en ciertos casos específicos. Los resultados que expondré forman parte de una serie de trabajos en colaboración con Carolina Araujo, Ana Quedo y Sokratis Zikas.

## Palabras claves

Automorfismos, Superficies cuárticas, Espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ , Superficies K3, Geometría biracional

## Referencias

Araujo, C., Paiva, D., & Zikas, S. (2024). *On Gizatullin's Problem for quartic surfaces of Picard rank 2*. arXiv preprint arXiv:2410.08415.

Chang, M.-C. (1986). The automorphism group of smooth quartic surfaces. *Mathematische Annalen*, **274**, 441–446.

Gizatullin, M. H. (1980). Rational G-surfaces. *Izvestiya: Mathematics*, 14(2), 275–283.

Matsumura, H., & Monsky, P. (1964). On the automorphisms of hypersurfaces. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 3(3), 347–361.

Paiva, D. & Quedo, A. (2023). *Automorphisms of quartic surfaces and Cremona transformations*. arXiv preprint arXiv:2302.09014. [arXiv](https://arxiv.org/abs/2302.09014)



XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**COMUNICACIONES  
MATEMÁTICAS**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Cálculo de la transformada de Laplace multiplicativa inversa a través de series de Laguerre multiplicativas

EDINSON FUENTES

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia  
e-mail: [edinson.fuentes@uptc.edu.co](mailto:edinson.fuentes@uptc.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Los **polinomios de Laguerre multiplicativos** surgen como una de las soluciones de la ecuación de Sturm–Liouville en el contexto del **cálculo multiplicativo**, dada por

$$\frac{d^*}{dx} \left( e^{x\omega(x)} \odot \frac{d^*y}{dx} \right) \oplus (e^{n\omega(x)} \odot y) = 1, \quad x \geq 0,$$

donde  $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$  con  $\alpha > -1$  y  $d^*/dx$  denota la derivada multiplicativa (véase [1, 3]). En esta charla se presentan dos métodos para calcular y aproximar la inversa de la transformada de Laplace multiplicativa ([4]) utilizando series multiplicativas de Laguerre. Estos métodos se conocen como el **método multiplicativo de Tricomi** y el **método multiplicativo de Weeks**.

Asimismo, se ilustran ambos enfoques resolviendo ciertas ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$y'' + \left( f(x) - \frac{y'}{y} \right) y' + g(x)y \ln y = 0, \quad (1)$$

con condiciones iniciales  $y(0) = y_0$  and  $y'(0) = y_0 \ln(y_1)$ , empleando técnicas del cálculo multiplicativo (ver [2]).

## Palabras claves

Polinomios de Laguerre multiplicativos, métodos de Tricomi y Weeks, transformada de Laplace multiplicativa inversa.

## Referencias

- [1] A. E. Bashirov, E. Mısırlı and A. Özyapıcı, *Multiplicative calculus and its applications*, J. Math. Anal. Appl. 2008, **337**, no. 1, 36–48.
- [2] E. Fuentes E., L. E. Garza and F. Velázquez, *On multiplicative Jacobi polynomials and function approximation through multiplicative series*, arXiv:2410.01009, 2024. arXiv.org, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.01009>.
- [3] H. Y. Kosunalp, S. Bas and S. Kosunalp, *An Efficient Solution of Multiplicative Differential Equations through Laguerre Polynomials*, Symmetry. 2024 **16** (6), 748.
- [4] N. Yalçın, E. Celik and H. Gokdogan, *Multiplicative Laplace transform and its applications*, Optik. 2016, **127**, no. 20, 9984–9995.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Relación entre grafos y conjuntos diferencia

FERNANDO ANDRÉS BENAVIDES

Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

e-mail: [fandresbenavides@udenar.edu.co](mailto:fandresbenavides@udenar.edu.co)

WILSON FERNANDO MUTIS

Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

e-mail: [wilsonmutis@udenar.edu.co](mailto:wilsonmutis@udenar.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Los grafos fuertemente regulares son un tipo particular de grafo simple y fueron introducidos por R. C. Bose en 1963, ver [2]. Erickson et al. [3] definieron los Deza grafos, los cuales son una generalización de esta clase de grafos; la diferencia entre grafos fuertemente regulares y Deza grafos es que  $|N_u \cap N_v| \in \{\lambda, \mu\}$  donde  $N_u$  denota la vecindad del vértice  $u$ . Existe una versión dirigida de estos dos tipos de grafos; un digrafo  $\Gamma$  es una pareja  $(X, R)$  donde  $X$  es un conjunto finito de vértices y  $R \subseteq X^2$  es un subconjunto de aristas. Para cada vértice  $u$  el conjunto de vértices que son dominados por  $u$  se denomina la vecindad externa de  $u$ , denotada por  $N_u^+$ , y el conjunto de vértices que dominan a  $u$  se denomina la vecindad interna de  $u$ , denotada por  $N_u^-$ . Un digrafo  $\Gamma$  se denomina regular de valencia  $k$  si  $|N_u^+| = |N_u^-| = k$  para cada vértice  $u$ . Un digrafo  $\Gamma$  es un  $(n, k, \lambda, \mu)$ -Deza digrafo si  $\Gamma$  es regular de valencia  $k$  y para cada par de vértices distintos  $u$  y  $v$ , se tiene  $|N_u^+ \cap N_v^+| \in \{\lambda, \mu\}$ . Existen distintas construcciones de Deza grafos dirigidos por ejemplo a partir de digrafos de Cayley, producto lexicográfico de grafos, espacios lineales singulares, y estructuras de incidencia asociadas con espacios vectoriales, ver [4–6]. Otra construcción considera conjuntos diferencia de un grupo finito. Sea  $X$  un grupo de orden  $n$  escrito multiplicativamente. Un  $(n, k, \lambda)$ -conjunto diferencia  $D$  en  $X$  es un  $k$ -subconjunto de elementos de  $X$  tales que cada elemento  $x \neq 1$  de  $X$  tiene exactamente  $\lambda$  representaciones  $x = d_1 d_2^{-1}$  con  $d_1, d_2 \in D$ .

El objetivo de la presente charla es mostrar la relación que existe entre estos tres tipos de objetos combinatorios y presentar varios valores de sus parámetros para los cuales no existen dichos objetos [1].

## Palabras claves

Grafo simple, grafo dirigido, grafo fuertemente regular, Deza grafo, conjunto diferencia.

## Referencias

- [1] Fernando Andres Benavides and Carlos Alberto Trujillo. A note of non-existence of strongly regular and deza graphs. *Electronics Letters*, 61(1):e70179, 2025.
- [2] R. C. Bose. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. *Pacific Journal of Mathematics*, 13(2):389 – 419, 1963.
- [3] M. Erickson, S. Fernando, W. H. Haemers, D. Hardy, and J. Hemmeter. Deza graphs: A generalization of strongly regular graph. *Journal of Combinatorial Designs*, 7(6):395–405, 1999.
- [4] Kaishun Wang, Jun Guo, and Fenggao Li. Singular linear space and its applications. *Finite Fields and Their Applications*, 17(5):395–406, 2011.
- [5] Kaishun Wang and Fenggao Li. Deza digraphs ii. *European Journal of Combinatorics*, 29(2):369–378, 2008.
- [6] Kaishun Wang and Yan quan Feng. Deza digraphs. *European Journal of Combinatorics*, 27(6):995–1004, 2006.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Explorando Topologías de Progresiones Aritméticas y Algunas Generalizaciones

KEVIN STIVEN CARMONA ALEMAN

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

e-mail: [kscarmonaa@ut.edu.co](mailto:kscarmonaa@ut.edu.co)

NIDIA YADIRA CAICEDO BRAVO

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

e-mail: [nycaicedob@ut.edu.co](mailto:nycaicedob@ut.edu.co)

JHONNY CARPEDIEM GÓMEZ

Filiación: Universidad del Valle. Cali, Colombia.

e-mail: [jhonny.gomez@correounivalle.edu.co](mailto:jhonny.gomez@correounivalle.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Furstenberg, H [1] introduce la topología  $\tau_F$  en  $\mathbb{Z}$  generada a partir de todas las progresiones aritméticas de la forma

$$a\mathbb{Z} + b = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$$

donde  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ . El espacio  $(\mathbb{Z}, \tau_F)$  es conocido como espacio de Furstenberg. Con este espacio fue presentada por primera vez la primera demostración topológica de la infinitud de números primos.

Golomb, S. W. [2] introduce la topología  $\tau_G$  en  $\mathbb{N}_0$  generada a partir de las progresiones aritméticas de la forma

$$a\mathbb{N}_0 + b = \{an + b : n \in \mathbb{N}_0\}$$

donde  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$  con  $a, b$  primos relativos y se llama topología Golomb. En este espacio, Golomb presentó una nueva demostración de la infinitud de los

números primos.

Kirch, A. M. [3] introduce la topología  $\tau_K$  en  $\mathbb{N}$

$$a\mathbb{N}_0 + b = \{an + b : n \in \mathbb{N}_0\}$$

donde  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a$  libre de cuadrados y  $a, b$  son primos relativos, se le conoce como topología de Kirch.

John Knopfmacher [4] introduce una generalización topológica sobre dominios de integridad, construidas a partir de colecciones  $\mathcal{S}_a$  de ideales propios del anillo  $R$  diferentes de cero.

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}} = \{a + \mathfrak{a} : a \in R, \mathfrak{a} \in \mathcal{S}_a\}$$

lo cual genera una sub-base para alguna topología, la anterior topología se conoce como topología "Coset".

Jhixon Macías [5] ofrece una continuación natural en esta línea, proponiendo una nueva topología sobre dominios de integridad, a partir de

$$\sigma_r := \{s \in R : \langle r \rangle + \langle s \rangle = R\}$$

donde para todo  $r \in R$  y  $\langle r \rangle$  es el ideal generado por  $r$ . Así

$$\beta_R := \{\sigma_r : r \in R\}$$

forma una base para la topología de Macías.

Este trabajo presenta propiedades básicas de los espacios topológicos de Furstenberg, Golomb y Kirch. Se profundiza en las topologías desarrolladas por Knopfmacher y Macías, que brindan una generalización del espacio de Golomb en el contexto de dominios de integridad.

## Palabras claves

Dominio de integridad, Propiedades topológicas, Topologías aritméticas.

## Referencias

- [1] H. Furstenberg. “On the infinitude of primes”. En: *The American Mathematical Monthly* 62.5 (1955), págs. 353-353. DOI: [10.2307/2307043](https://doi.org/10.2307/2307043).
- [2] S. W. Golomb. “A connected topology for the integers”. En: *The American Mathematical Monthly* 66.8 (1959), págs. 663-665. DOI: [10.1080/00029890.1959.11989385](https://doi.org/10.1080/00029890.1959.11989385).
- [3] A. M. Kirch. “A countable, connected, locally connected Hausdorff space”. En: *The American Mathematical Monthly* 76.2 (1969), págs. 169-171. DOI: [10.1080/00029890.1969.12000163](https://doi.org/10.1080/00029890.1969.12000163).
- [4] John Knopfmacher y Stefan Porubský. “Topologies related to arithmetical properties of integral domains”. En: *Expositiones Mathematicae* 15.2 (1997), págs. 131-148.
- [5] Jhixon Macías. “The Macías topology on integral domains”. En: *Topology and its Applications* 357 (2024), pág. 109070. DOI: [10.1016/j.topol.2024.109070](https://doi.org/10.1016/j.topol.2024.109070).

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Una demostración del Teorema de Rolle a la Carathéodory

SIMEÓN CASANOVA TRUJILLO

Filiación: Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia  
e-mail: [scasanova@unal.edu.co](mailto:scasanova@unal.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Se presenta una demostración alternativa del Teorema de Rolle para funciones continuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , haciendo uso del concepto de derivada de Carathéodory. La demostración clásica hace uso del hecho de que toda función continua definida en un conjunto compacto, alcanza un máximo y un mínimo en el compacto. Lo novedoso de la demostración a la Carathéodory es que ésta no hace uso de la existencia de máximos ni mínimos en el compacto  $[a, b]$ . Se dan ideas de como se podría generalizar la demostración propuesta para funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $G$  es un grupo topológico localmente compacto y divisible.

### Palabras claves

Función continua, derivada de Carathéodory, Teorema de Rolle.

### Referencias

- [1] Apostol T. Mike. Análisis Matemático. Editorial Reveré.
- [2] Stephen Kuhn, The Derivative a la Carathéodory, American Mathematical Monthly, Vol.98, No.1, January, (1991).
- [3] Constantine Carathéodory, Theory of functions of complex variable, Vol.I, Chelsea, New York, (1954).

- [4] Acosta G. Ernesto. Differentiability in Topological Groups. Soochow Journal of Mathematics, Vol. 22, No. 1, pp. 39-48, January 1996.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Aplicaciones de la Geometría Algebraica en Redes de Reacción

ASTRID LILIANA CONTRERAS MENDOZA

Filiación: Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga.

e-mail: [acontreras793@unab.edu.co](mailto:acontreras793@unab.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Las redes de reacciones representan interacciones entre especies y estas interacciones se pueden modelar por medio de un grafo, y la evolución de las concentraciones de las especies por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que en muchos casos de interés van a ser polinomiales [4]. Los equilibrios de un sistema así, son entonces las soluciones positivas de un sistema de ecuaciones polinomiales, que llamamos variedad de *steady states* positivos. Estos sistemas polinomiales pueden tener muchas variables y una gran cantidad de parámetros desconocidos, pero también tienen una estructura especial que permite entender bastantes propiedades del sistema en cuestión y responder algunas preguntas de interés.

En esta charla presentaremos una introducción a los sistemas de reacción química desde el enfoque de la Teoría de Redes de Reacción Química (CRNT, por sus siglas en inglés). Abordaremos las estructuras básicas que caracterizan estas redes, así como algunos de los métodos y problemas más comunes que surgen en su estudio. Nos enfocaremos en cómo la geometría algebraica proporciona herramientas poderosas para analizar el comportamiento de estos sistemas, especialmente en lo que respecta a la existencia y multiplicidad de estados estacionarios. A través de ejemplos concretos, ilustraremos distintos tipos de comportamientos dinámicos y discutiremos cómo responder algunas de las preguntas de interés en bioquímica, siguiendo la línea de análisis planteada en [3].

## Palabras claves

Acción de masas, estados estacionarios, geometría algebraica, Redes de reacciones, sistemas dinámicos.

## Referencias

- [1] CONTRERAS MENDOZA, A. L. (2025). *Multiestacionaridad e Inyectividad: Un enfoque desde la geometría algebraica*. Paskín Matemático, 7(1), 23. Artículo 4. <https://editorial.konradlorenz.edu.co/2025/01/74bf8c0527f8-Paskin13.pdf>
- [2] DICKENSTEIN, A. M. (2020) *Algebraic geometry tools in systems biology*.
- [3] PASCUAL, B -ESCUDERO, A. TORRES. (2022) *Herramientas algebráicas y combinatorias para el estudio de sistemas dinámicos polinomiales*. La Gaceta de la RSME, Vol. 25, Núm. 2, Págs. 299 - 325.
- [4] FEINBERG, M (2019) *Foundations of chemical reaction network theory*, Springer.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Estudio de la dinámica suave y no suave de una variación del modelo epidemiológico SIR

GERMÁN F. ESCOBAR F.

Filiación: Universidad Surcolombiana , Neiva, Colombia

e-mail: [german.escobar@usco.edu.co](mailto:german.escobar@usco.edu.co)

JULIO C. DUARTE V., OSCAR M. LONDOÑO D.

Filiación: Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia

e-mail: [oscar.londono@usco.edu.co](mailto:oscar.londono@usco.edu.co), [julio.duarte@usco.edu.co](mailto:julio.duarte@usco.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Para este estudio, consideramos una modificación del modelo de Maier-Brockmann [1], propuesto para COVID-19, el cual implementa medidas de cuarentena y contención. Nosotros incluimos pérdida de la inmunidad, una medida de contención y no consideramos cuarentena, como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \beta SI + \rho R - kS; \\ \dot{I} &= -\beta SI - \gamma I - kI; \\ \dot{R} &= \gamma I - \rho R + k(S + I),\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $0 < \beta, \gamma, \rho < 1$ ,  $0 \leq k < 1$  y  $S + I + R = 1$ . Aquí,  $k$  representa la tasa de contención. En particular, para  $k = 0$ , tenemos el modelo SIR con pérdida de inmunidad (SIR+L), y para  $0 < k < 1$ , el sistema (1) es el modelo SIR con pérdida de inmunidad y una medida de contención, el cual será denotado por SIR+L+C. La dinámica suave por partes se formula estableciendo como umbral un cierto valor constante de infectados  $I = I_c$ . La línea recta  $I_c$  define el conjunto límite de discontinuidad que conecta los sistemas suaves SIR+L y SIR+L+C.

## Palabras claves

Análisis cualitativo, Bifurcaciones, Campo vectorial suave por partes, Epidemiología.

## Referencias

- [1] Maier, Benjamin F. and Brockmann, Dirk (2020). Effective containment explains subexponential growth in recent confirmed COVID-19 cases in China, *Science*, 368, 742–746 pp. <https://doi.org/10.1126/science.abb4557>.
- [2] Carvalho, Tiago and Cristiano, Rony and Rodrigues, Diego S. and Tonon, Durval J. (2021). Global analysis of a piecewise smooth epidemiological model of COVID-19, *Nonlinear Dynamics*, 105, 3763–3773 pp. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06801-9>
- [3] Kuznetsov, Yu. A. and Rinaldi, S. and Gragnani, A. (2003). One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13, 2157-2188 pp. <https://doi.org/10.1142/S0218127403007874>
- [4] Maurício de Carvalho, João P. S. and Rodrigues, Alexandre A. (2023). SIR model with vaccination: bifurcation analysis, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 22, 32 pages. <https://doi.org/10.1007/s12346-023-00802-2>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Comunicación: Algunas Sucesiones de Números  
Enteros Provenientes de la Teoría de  
Representaciones de Carcajes

PEDRO FERNANDO FERNÁNDEZ ESPINOSA

Grupo ITENUA

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Colombia  
e-mail: [pedro.fernandez01@uptc.edu.co](mailto:pedro.fernandez01@uptc.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

En el contexto de la teoría de representaciones de álgebras, ha cobrado relevancia recientemente el concepto de categorización algebraica de sucesiones de números enteros, introducido por Fahr y Ringel. Este enfoque consiste en interpretar los términos de una sucesión de números enteros como invariantes asociados a objetos en una categoría. Bajo esta perspectiva, las identidades entre números se traducen en relaciones estructurales entre dichos objetos. En particular, Fahr y Ringel lograron una categorización algebraica de los números de Fibonacci utilizando las componentes preproyectiva y regular del carcaj 3-Kronecker [4–6].

En esta charla, presentaremos nuevas categorizaciones de ciertas sucesiones de números enteros que surgen al enumerar y describir ideales homológicos asociados a determinadas álgebras de caminos. Estos ideales han sido objeto de un estudio algebraico profundo en trabajos previos como [1–3].

## Palabras claves

Carcaj de Auslander-Reiten, Categorización algebraica, Ideal Homológico.

## Referencias

- [1] M. Armenta, Homological Ideals of Finite Dimensional Algebras, CIMAT, Mexico, 2016. Tesis de Maestría.
- [2] M. Auslander, M. I. Platzeck, and G. Todorov, Homological Theory of Idempotent Ideals, Transactions of the American Mathematical Society 332 (1992), no. 2, 667-692.
- [3] P.F. F. Espinosa, A.M. Cañadas, Homological Ideals as Integer Specializations of Some Brauer Configuration Algebras, Ukrainian Mathematical Journal 74, 1369-1385 (2023).
- [4] P. Fahr and C. M. Ringel, A partition formula for Fibonacci numbers, J. Integer Seq. 11 (2008), no. 08.14, 1-9.
- [5] P. Fahr and C. M. Ringel, Categorification of the Fibonacci numbers using representations of quivers, J. Integer Seq. 15 (2012), no. 12.2.1, 1-12.
- [6] P. Fahr and C. M. Ringel, The Fibonacci triangles, Advances in Mathematics. 230 (2012), 2513-2535.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Polinomios matriciales de Sobolev aplicados a la aproximación de funciones matriciales

EDINSON FUENTES

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia  
e-mail: [edinson.fuentes@uptc.edu.co](mailto:edinson.fuentes@uptc.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

En esta charla se presentan algunas propiedades de los polinomios de Sobolev matriciales, los cuales son ortogonales con respecto a la forma sesquilineal matricial

$$\langle p, q \rangle_s = \int_{E_0} p(x) \mathbf{W}_0(x) (q(x))^* dx + \int_{E_1} p'(x) \mathbf{W}_1(x) (q'(x) \mathbf{M})^* dx, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_m$  es una matriz no singular,  $\mathbf{W}_0$  y  $\mathbf{W}_1$  son funciones de peso matriciales. Además, las correspondientes sucesiones de polinomios matriciales  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  ortogonales con respecto a  $\mathbf{W}_0$  and  $\mathbf{W}_1$ , respectivamente, satisfacen la siguiente relación de estructura:

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1} P'_{n+1}(x) + \frac{1}{n} \sigma_n P'_n(x), \quad n \geq 1,$$

donde  $\sigma_n$  es una matriz compleja para cada número natural  $n$ . Esta relación se conoce como relación de coherencia [1].

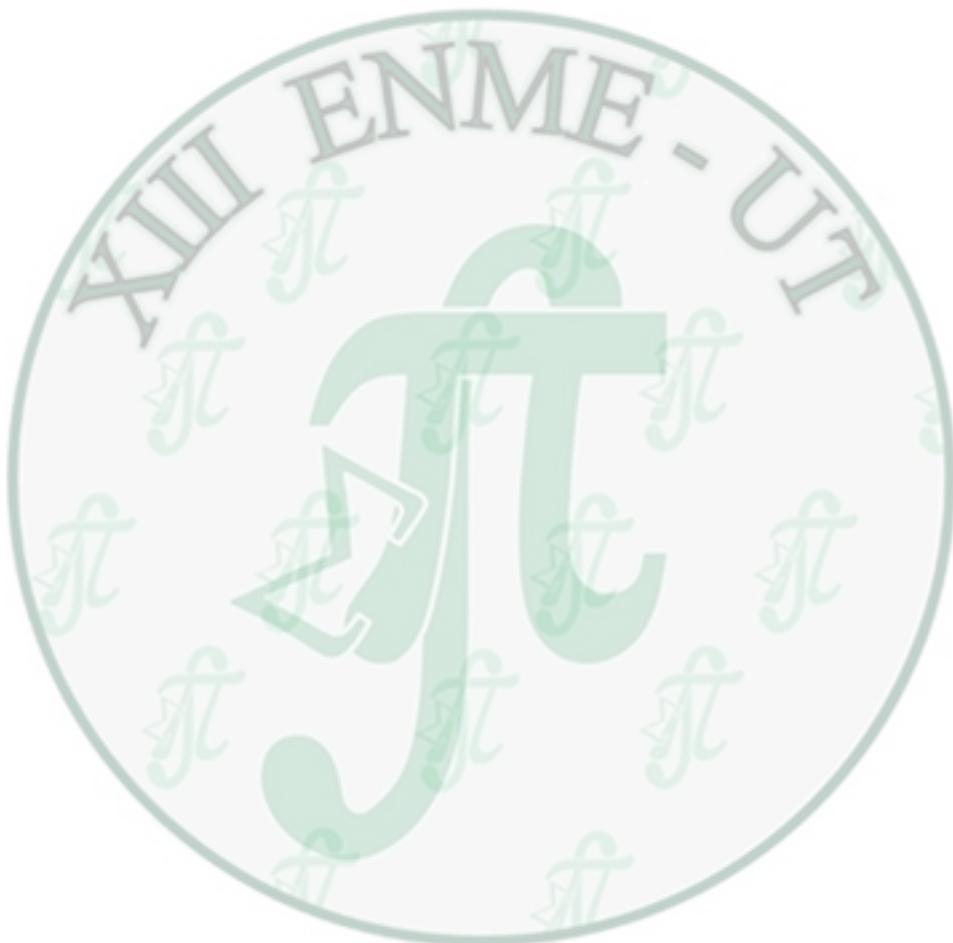
Asimismo, se presentan algunos algoritmos para la aproximación de funciones matriciales mediante series de Fourier–Sobolev matriciales (véase [2]). Finalmente, se presentan algunos ejemplos numéricos implementados en MATLAB R2024b.

### Palabras claves

Polinomios de Sobolev matriciales, aproximación de funciones matriciales

## Referencias

- [1] E. Fuentes y L. E. Garza Gaona (2023). *Coherent pairs and Sobolev-type orthogonal polynomials on the real line: an extension to the matrix case*, J. Math. Anal. Appl. **518**, no. 1, Paper No. 126674, 21 pp.
- [2] E. Fuentes; L. E. Garza Gaona y M. L. Saiz Saenz (2024). *Matrix functions approximation using matrix coherent pairs and their associated Sobolev-type orthogonal polynomials* , Submitted.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**Un estudio discreto sobre la evolución del continuo:  
la antigüedad, la Revolución Científica y la Edad Contemporánea**

**MARÍA FERNANDA ZÁRATE ORTEGA**

**Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia**

e-mail: [mfzarateo@upn.edu.co](mailto:mfzarateo@upn.edu.co)

**SOFÍA BARRIOS ZAMUDIO**

**Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia**

e-mail: [sbarriosz@upn.edu.co](mailto:sbarriosz@upn.edu.co)

**CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA**

**Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia**

e-mail: [cgrendonm@upn.edu.co](mailto:cgrendonm@upn.edu.co)

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## Introducción

A lo largo de la historia de las matemáticas es posible identificar diferentes conceptos u objetos que han resultado determinantes para el desarrollo de las matemáticas en tanto consolidan ideas complejas o se constituyen en la base de otros objetos, tal es el caso de los números reales ( $R$ ). Las propiedades algebraicas, topológicas y de orden que comporta el sistema numérico de los reales, lo convierten en un objeto que permitió en su momento una fundamentación del análisis y, con ello, un desarrollo sustancial de las matemáticas durante los siglos xviii y xix. En particular, una de las principales propiedades que caracteriza al sistema numérico de los reales es la de continuidad.

En el marco del proyecto de investigación «Valoración de aprendizajes sobre números reales logrados a través de la implementación de una tarea diseñada para la formación inicial de profesores de matemáticas», financiado por la Universidad Pedagógica Nacional y adelantado por el grupo de investigación RE-MATE de la misma institución, se llevó a cabo una revisión histórico-epistemológica de la noción de continuidad con el fin de establecer algunos de sus principales hitos y comprender mejor su desarrollo histórico.

Así, en lo que sigue, se presenta el resultado de dicha revisión a partir de tres momentos. Inicialmente, se examina la concepción aristotélica sobre lo continuo que tiene dos perspectivas. Por un lado, como una característica de algunas magnitudes que permite que sean divisibles de manera indefinida y, por otro lado, lo continuo como aquellos elementos unidos que comparten un mismo extremo. Enseguida, se aborda la transformación del concepto de continuidad durante los siglos XVI y XVII a partir de los trabajos de Galileo y Leibniz. Galileo explora el continuo desde la física del movimiento, acercándose a la noción de indivisibles, idea desarrollada posteriormente por Cavalieri. Por otro lado, Leibniz se refiere al continuo como un «laberinto» cuya comprensión exige rechazar la idea de que está compuesto por puntos indivisibles. Finalmente, se analiza la formalización moderna del continuo a partir de los trabajos de Cantor y Dedekind. El primero introduce su célebre noción de «cortaduras» en el conjunto de los números racionales, mientras que Cantor demostró la no-numerabilidad del conjunto de los números reales.

## Desarrollo

### **El continuo en la Grecia clásica - siglo IV a.C.**

Inicialmente, se examina la concepción aristotélica sobre lo continuo la cual, como indica Sattler (2020), tiene dos perspectivas. Por un lado, como una característica de algunas magnitudes que permite que sean divisibles de manera indefinida y, por otro lado, lo continuo como aquellos elementos unidos que comparten un mismo extremo.

Es importante iniciar señalando que Aristóteles retoma el principio de admisibilidad racional, presente tanto en Platón como en los atomistas. Dicho principio establece que los componentes fundamentales de la realidad no pueden ser meras construcciones del pensamiento desligadas de la experiencia, sino que deben cumplir una doble condición: por un lado, ser comprensibles y verificables a través de la razón y, por otro lado, ser capaces de explicar detalladamente los fenómenos observables en la naturaleza. En otras palabras, una explicación resulta válida si logra articular coherencia lógica y pertinencia empírica.

Aplicado al problema del continuo (*i. e.*, qué se entiende por continuidad), este principio se refleja en la crítica aristotélica a los atomistas y a Zenón. Los primeros postulaban la existencia de mínimos indivisibles como base de lo real; sin embargo, aunque esta idea puede parecer racionalmente simple, no explica adecuadamente fenómenos como el movimiento, que exige

una estructura continua. Así, la reflexión de Aristóteles sobre lo continuo se ubica en el cruce entre física, matemáticas y metafísica. En los libros IV, V y VI de *Física*, Aristóteles responde a las paradojas de los eleatas —en especial las de Zenón— y a la doctrina atomista que concebía la realidad como compuesta de mínimos indivisibles. Frente a estas posiciones, formula una concepción del continuo basada en tres nociones clave.

En primer lugar, la unidad, entendida no como mera suma de elementos, sino como integración real en la que «los extremos de las partes son uno y el mismo» (*Phys.* V.3, 227a10-17, citado por Sattler, 2020), de modo que el límite deja de ser doble para convertirse en único. En segundo lugar, la divisibilidad potencial, según la cual la magnitud es «infinitamente divisible, pero sólo en potencia, no en acto» (*Phys.* VI.1, 231b15-18, citado por Sattler, 2020), lo que significa que las partes del continuo no existen previamente, sino que aparecen sólo cuando se realizan las divisiones en el pensamiento o en la práctica.

Finalmente, la idea de que los extremos coinciden distingue lo continuo de lo contiguo: mientras en lo contiguo los límites simplemente se tocan, en lo continuo se vuelven uno mismo, como ocurre entre el muslo y la pierna de un animal (*Met.* V.6, 1016a1-7, citado por Shapiro et al., 2021). Al respecto, Alejandro de Afrodisias profundizó en esta tensión a partir de distinguir entre continuidad en sentido general, cuando las cosas se mantienen juntas por un vínculo externo como un haz de leña atado con una cuerda; continuidad en sentido estricto, cuando las partes comparten un límite real, como en un órgano del cuerpo; y continuidad en sentido estricto y primario, cuando las partes no pueden moverse ni existir separadamente, como en una línea recta o en un organismo.

De este modo, la continuidad posee una unidad más fuerte que la mera contigüidad: no se trata de cuerpos simplemente unidos, como piezas de madera pegadas con pegamento, sino de partes que constituyen un todo.

Esta interpretación de los extremos permite entender por qué Aristóteles sostiene que las magnitudes continuas son potencialmente divisibles. En *De caelo* I.1 declara que «lo continuo es lo que es divisible en partes que son divisibles» (268a6-7, citado por Shapiro et al., 2021). Esto significa que el continuo no está dividido de hecho, sino que admite división indefinida en potencia. Un segmento de recta, por ejemplo, no está compuesto de infinitos puntos dados de antemano, sino que puede ser dividido en mitades, cuartos o centésimos cuando lo

queramos. La división solo existe en el acto de dividir, no previamente. Con ello, Aristóteles evita la noción atomista de un mínimo indivisible y, al mismo tiempo, responde a las paradojas de Zenón<sup>1</sup>, que partían de la suposición de una división actual del continuo.

Con esta concepción, Aristóteles logra sostener que el movimiento y el cambio son posibles sin caer en contradicciones, pues no es necesario suponer ni átomos indivisibles ni divisiones infinitas en acto.

Otra arista desde la cual Aristóteles aborda el asunto de la continuidad es desde la terna magnitud, movimiento y tiempo. En *Física VI.1* Aristóteles afirma que si la magnitud es continua, también lo serán el movimiento y el tiempo. Una magnitud puede dividirse indefinidamente y lo mismo ocurre con el movimiento que la recorre y con el tiempo que la mide. El cambio, ya sea cuantitativo o cualitativo, también se entiende bajo esta lógica: pasar de blanco a negro, por ejemplo, es un proceso continuo que admite análisis en partes, aunque esas partes no preexistan, sino que se despliegan en la actualización del cambio. Así, la paradoja de la flecha inmóvil se disuelve: el tiempo no es una serie de instantes puntuales previamente separados, sino un continuo que acompaña al movimiento.

Aristóteles no sólo se opone a Zenón, sino también a quienes afirmaban que todo está siempre en movimiento, aunque no se perciba. En *Física VIII.3* rechaza esta postura y señala que ciertos procesos comienzan «de golpe» (*athróos*), como el congelamiento del agua y que no existe un cambio continuo e imperceptible en todas las cosas (253b21-26, citado por Shapiro et al., 2021). De este modo, distingue cuidadosamente entre la continuidad real de los procesos y los inicios puntuales del cambio.

En resumen, la concepción aristotélica del continuo combina varias dimensiones. Ontológicamente, el continuo es uno porque sus extremos coinciden y es, a la vez, potencialmente divisible, aunque nunca compuesto de infinitos elementos en acto. Físicamente, movimiento, tiempo y cambio participan de esa misma estructura de continuidad. De este modo, Aristóteles logra responder y resolver las paradojas de Zenón, mostrando que su error está en confundir lo infinito en potencia con lo infinito en acto. Si se acepta la distinción aristotélica, el movimiento deja de ser una contradicción y se vuelve perfectamente posible en

---

<sup>1</sup> Para mayor información sobre las paradojas de Zenón, se recomienda consultar, por ejemplo, Muñoz y Morales (2009) o Thomson (1985).

un continuo. Además, Aristóteles niega los indivisibles frente al atomismo y limita la idea de un movimiento perpetuo frente a los pensadores que lo defendían. Su doctrina, enriquecida por los comentaristas peripatéticos, no sólo resolvió disputas antiguas, sino que abrió un marco de reflexión que anticipa debates actuales en filosofía y matemáticas sobre la naturaleza del continuo.

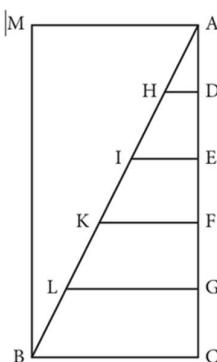
### **El continuo en la Revolución Científica - siglos XVI a XVIII**

Durante el Renacimiento tardío y a inicios de la Revolución Científica, la discusión sobre el continuo se desplaza hacia un enfoque más pragmático que el de la tradición griega. En lugar de priorizar la racionalidad lógica de los conceptos, se busca que estos faciliten la resolución de problemas físicos y geométricos de la época.

De acuerdo con Levey (2021a), Galileo empleó construcciones geométricas para representar el continuo del movimiento. En su modelo para el movimiento acelerado las líneas paralelas definen infinitos grados de velocidad que aumentan desde el punto *A* de reposo hasta llegar al segmento de velocidad *BC*. En la Figura 1 estos cambios en las velocidades se representan con los distintos segmentos paralelos al segmento *BC*. Estos segmentos, concebidos por Galileo como sin grosor, aluden implícitamente a los indivisibles; es decir, a entidades geométricas que no tienen extensión ni partes. De esta manera, el segmento *AC* representa el tiempo transcurrido y el segmento *BC* la velocidad en dicho tiempo, por tanto, se puede concluir que el área del triángulo *AHD* simboliza la cantidad de movimiento.

**Figura 1**

*Representaciones de los cambios de velocidad para Galileo*



*Nota.* Imagen tomada de Levey (2021a) y original de Galileo (1632).

Por otro lado, en el caso del movimiento uniforme, Galileo propone una representación similar mediante un paralelogramo. Si la velocidad constante se expresa como el segmento  $BC$  de la Figura 1 y se toma el mismo tiempo transcurrido (representado mediante el segmento  $AC$ ), entonces el área total será el doble del área del triángulo  $AHD$ , lo cual sugiere que se recorrerá el doble de espacio que en el movimiento acelerado.

El uso de indivisibles en este contexto plantea una tensión conceptual que se evidencia en los trabajos de Cavalieri, quien introduce los indivisibles como una nueva categoría de magnitud. Esta noción tal como lo expone Jesseph (2021), presenta dificultades, dado que, cualquier figura contiene una cantidad infinita de líneas indivisibles y ningún múltiplo de una magnitud finita puede exceder una magnitud infinita. Es decir, esto contradice el principio de Arquímedes, según el cual toda magnitud finita puede superar a otra mediante sumas sucesivas, lo que excluye a los indivisibles del concepto clásico de magnitud.

Por su parte, Galileo adopta una estrategia distinta para integrar los indivisibles en el razonamiento geométrico, él no atribuye a los indivisibles el estatuto de magnitudes, sino que los concibe como *non quanti*, es decir, entidades sin cantidad. Tal como lo expone Levey (2021a), esta distinción entre *quanti* y *non quanti* resulta esencial para comprender su modelo: las primeras tienen medida finita y son divisibles indefinidamente, mientras que las segundas carecen de medida y son indivisibles. Al utilizar *non quanti* para representar el continuo, Galileo evita una discretización explícita, pero introduce elementos que no pueden ser comparados ni medidos, lo que tensiona la noción clásica de magnitud. No se trata de cantidades infinitamente pequeñas, sino de entidades que no son cantidades en absoluto. Esta concepción, aunque útil para el razonamiento geométrico, no resuelve del todo la ambigüedad entre lo continuo y lo discreto, pues recurre a elementos incomparables para representar una magnitud que, por definición, debería ser medible.

De manera análoga, Leibniz también recurre a paradojas clásicas, como la de Aquiles y la tortuga, para reflexionar sobre el continuo (Levey, 2021b). En su análisis no se cuestiona la existencia del movimiento, a diferencia de Zenón, sino que argumenta que cualquier intervalo recorrido debe contener un elemento mínimo: puntos en el espacio, momentos en el tiempo, líneas y planos en el continuo en dos y tres dimensiones, respectivamente.

Leibniz argumenta que, si se supone que una línea se compone de puntos, su cantidad debe ser finita o infinita. Si fuera finita, la línea no podría dividirse en cualquier número de partes iguales, lo cual contradice los principios fundamentales de la geometría. Por ello, sostiene que el continuo no está compuesto de puntos, sino que estos surgen como modos de la no uniformidad. En un movimiento perfectamente uniforme, no hay manera consistente de asignar una posición a un cuerpo móvil tras su momento inicial. Solo cuando esta uniformidad se rompe, (fuerzas de aceleración) se definen subintervalos que permiten asignar posiciones en los límites entre ellos. Así, los puntos no son elementos constitutivos del continuo, sino resultados de divisiones que introducen discontinuidades.

Esta concepción del continuo se articula con la distinción que Leibniz establece entre los objetos ideales, que pertenecen exclusivamente a la esfera de la razón; y los cuerpos reales, en los que las cantidades son discretas. En este marco, los infinitesimales<sup>2</sup> no se entienden como entidades físicas, sino como ficciones útiles para el razonamiento matemático. En su obra *De Quadratura Arithmetica* [DQA] (1676), Leibniz emplea los infinitesimales como una notación abreviada que permite razonar como si las figuras estuvieran compuestas por líneas o rectángulos infinitesimalmente pequeños. Sin embargo, esta notación representa relaciones entre cantidades finitas que pueden hacerse tan pequeñas como se deseé, de forma que, *a priori*, no se compromete el rigor de los razonamientos.

En las primeras proposiciones de DQA, Leibniz trabaja exclusivamente con cantidades finitas, siguiendo el método arquimediano de agotamiento. Los infinitesimales se introducen más adelante, a partir de la Proposición 11, como un atajo que permite acelerar los cálculos sin abandonar la posibilidad de una demostración rigurosa. La continuidad se presupone para legitimar la inferencia de que el espacio puede hacerse más pequeño que cualquier cantidad dada, lo cual cobra sentido a la luz del axioma de Arquímedes. Principalmente teniendo en cuenta su corolario, el principio arquimediano de igualdad, afirma que si para todo número natural  $n$  se cumple que  $|x - y| < 1/n$ , entonces  $x = y$ .

Los cánones particulares de rigor de Leibniz difieren en cierta medida de los estándares contemporáneos, tanto en los principios que acepta como en las suposiciones que está dispuesto a dejar implícitas. Sin embargo, esta diferencia no se traduce en laxitud conceptual ni en una

---

<sup>2</sup> Recordar que un infinitesimal se entiende, en general, como una cantidad positiva pero menor que cualquier número real.

transgresión del axioma de Arquímedes. Por el contrario, Leibniz se esfuerza por asegurar que sus procedimientos puedan ser reconstruidos dentro de un marco finitista, compatible con dicho axioma. Su cálculo, aunque expresado mediante ficciones simbólicas, se apoya en la idea de que toda magnitud puede ser superada por una suma finita de otras y que las diferencias pueden hacerse arbitrariamente pequeñas sin necesidad de invocar entidades infinitesimales reales.

Lo que esta aplicación de la ley de continuidad legitima, entonces, es proceder como si  $dx$  y  $dy$  fueran cantidades infinitesimales que pueden ser ignoradas en el último paso del cálculo; mientras que lo que en realidad representan son diferencias finitas que se asume que varían de acuerdo con el axioma de Arquímedes, de modo que pueden hacerse arbitrariamente pequeñas (Arthur 2013 citado en Levey 2021b). La ley de continuidad de Leibniz es un precepto metodológico y, en consecuencia, vago, a pesar de que él proporciona corolarios claros en el contexto de aplicaciones específicas. Además, Leibniz ofrece muy poco para justificar la ley en sí, aparte de apelaciones amplias a un principio de razón suficiente. Por lo tanto, el carácter final y la solidez de esta justificación de la ley de continuidad para el uso del infinito y lo infinitamente pequeño en las matemáticas de Leibniz son cuestionables.

No obstante, esta ley le permite formular una noción abstracta de continuidad que no se limita a magnitudes extendidas como el espacio o el tiempo, sino que se aplica al concepto de función. De hecho, su definición de función continua anticipa la formulación moderna que se conoce desde Weierstrass.

En resumen, Galileo y Leibniz, desde enfoques distintos, exploran los límites del razonamiento geométrico y físico mediante construcciones que desafían la noción tradicional de cantidad. Aunque partieron de ideas diferentes, ambos coinciden en que el continuo no puede entenderse como una simple suma de partes discretas. Sus propuestas transforman la manera de pensar el espacio, el tiempo y el movimiento, y aportan herramientas clave para el desarrollo del cálculo moderno.

### **El continuo en la Edad Contemporánea: siglos XIX y XX**

Una mirada contemporánea de la idea del continuo en la historia de las matemáticas está mediada por las crecientes ideas formalistas de los siglos XIX y XX, momento en el que los argumentos geométricos empiezan a considerarse insuficientes y la «formalidad», (expresada principalmente a través de lo que se denominó «aritméticización del análisis») dejada de lado en

el ocaso de los siglos XVII y XVIII, recupera espacio en el terreno de las matemáticas gracias a los trabajos previos de, por ejemplo, Cauchy y Weierstrass.

Así, aunque las representaciones geométricas siguen teniendo cabida en las matemáticas como ayudas o apoyos para el desarrollo de razonamientos, se asume que lo deseable es dotar de fundamentos aritméticos a la geometría. En este contexto, Dedekind establece una primera idea sobre la continuidad a través del siguiente principio:

Si todos los puntos de la recta caen en dos clases de manera que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos porciones (Dedekind, 1901, p. 11 citado en Hayashi, 2017, p. 103).

Este principio subyace a la idea de *cortadura* y de forma implícita señala que no quedan vacíos o huecos en la recta al clasificar a todos sus puntos en alguna de las dos clases. Desde luego, este enunciado busca establecer un paralelo con la idea de ordenar los números racionales, en principio, en dos clases a través de una relación de orden. Es decir, en suma, Dedekind procura establecer vínculos entre el sistema de los números racionales y los puntos de la recta, relación que posteriormente refina (al dotar a la recta de dos direcciones, un punto de origen y una unidad de medida, como señalan Arbeláez y Gálvez (2011)) y le será de utilidad para la construcción de los números reales.

Como menciona Hayashi (2017), resulta importante señalar que para Dedekind la continuidad es una propiedad de la recta y la suposición cierta de esta propiedad es un axioma. Es decir, se subraya que la continuidad no es un axioma *per se* sino una propiedad. Por tanto, la continuidad no es intrínseca a la recta, sino que es una propiedad que se le adjudica (no que se pueda extraer de la recta en tanto objeto geométrico).

La construcción de los números reales que realiza Dedekind aporta elementos para la comprensión sobre la importancia que tiene el continuo. Realizar cortaduras de números racionales a partir de números que no son racionales implica dotar de continuidad al conjunto de los números reales, construido, claro, a partir de números racionales. De manera más formal, como señala Recalde (2011), se asume que conjuntos como  $A = \{a \in Q : a^2 < 2 \text{ ó } a \leq 0\}$  que no tienen supremo en  $Q$  sí lo tengan en  $R$ . En últimas, gracias a la continuidad se obtiene que el sistema numérico de los reales cumple con el axioma de completitud, lo cual termina de

caracterizarlo como el único conjunto totalmente ordenado, completo y sin puntos extremos (*i.e.*, sin mínimo ni máximo) salvo isomorfismos.

Una vez construido el sistema de los números reales, bien a la manera de Dedekind u otras (*v.g.*, por intervalos o por series convergentes de Cauchy), un aporte relevante para la historia del continuo matemático, pero ubicado a un nivel distinto de las ideas presentadas hasta este momento histórico, es el de la hipótesis del continuo de Cantor. Esta hipótesis plantea que no existe algún conjunto cuya cardinalidad se ubique entre la de los números naturales y los números reales.

Además de establecer un orden entre conjuntos de cardinalidad infinita (vía que llevará al propio Cantor a una aritméticización del infinito y a la teoría de números transfinitos), esta hipótesis es relevante en el marco de la historia de lo continuo, porque establece la cardinalidad de lo continuo. Es decir, no se trata ya una mirada «geométrica» del continuo sino una «metamirada» que se ocupa del tamaño de este. En todo caso este cambio se puede advertir cómo un cambio ontológico del continuo, que no es visto ya desde el análisis sino desde una naciente teoría de conjuntos. Cabe recordar que la hipótesis del continuo es uno de los más famosos enunciados no demostrables en el marco de una teoría fija. En particular, como señala Fernández (2017), Gödel y Cohen demostraron que de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel no es posible demostrar la hipótesis del continuo ni tampoco su negación.

Por otra parte, a mediados del siglo XIX aparecen los trabajos de Peirce, quien concibe lo continuo como un todo general y sostiene que esta idea no debe ser interpretada como una suma interna de puntos (Valencia, 2010). Esta mirada se ubica entonces en las antípodas de la atomización del continuo que tendría apariciones en miradas como la de Dedekind, quien considera que se pueden llenar con puntos los vacíos que sobre la recta dejan los números racionales.

Iniciado el siglo XX, Hilbert, en su intento por formalizar todos los aspectos de la matemática propuso una axiomatización del continuo. En este enfoque, los números reales se definen como un cuerpo ordenado completo; es decir, un conjunto dotado de operaciones de suma y multiplicación, junto con una relación de orden total, que satisface la propiedad de completitud. Esta formalización permitió tratar el continuo como una estructura algebraica y lógica, independiente de cualquier interpretación geométrica.

De manera más contemporánea una mirada alternativa a la idea de continuo es la propuesta que desde la matemática intuicionista realiza Brouwer (Valencia, 2010). Mientras que en el enfoque formalista y conjuntista el continuo se define como el conjunto de los números reales, dotado de propiedades topológicas y algebraicas, Brouwer propone una visión radicalmente distinta: el continuo no es un conjunto de puntos, sino una totalidad vivida, una experiencia interna del tiempo que se manifiesta en la conciencia humana y que es representada en la mente de los matemáticos como una sucesión de instantes, lo que los lleva a asumir entonces que lo continuo se puede entender desde lo discreto, asunto que es errático para Brouwer.

El continuo intuicionista no puede ser descompuesto en puntos individuales, como lo hace la teoría de conjuntos. En lugar de eso, se concibe como una estructura dinámica, un proceso mental en constante desarrollo permeado por el devenir del tiempo. Esta visión implica que el continuo no puede ser tratado como un conjunto en el sentido clásico, ni puede ser objeto de operaciones como la medición de cardinalidades infinitas. Por lo tanto, la hipótesis del continuo no tiene sentido en el marco intuicionista, ya que asume una noción de conjunto que Brouwer rechaza.

En resumen, la concepción del continuo en Brouwer no se basa en la idea de un conjunto de puntos, sino en la vivencia interna del tiempo y la construcción mental de secuencias. Esta perspectiva transforma radicalmente la manera de entender la continuidad, alejándose de la estructura fija y objetiva del análisis clásico, y proponiendo en su lugar una matemática viva, dinámica y profundamente ligada a la actividad del sujeto pensante.

En conclusión, lo continuo en la Edad Contemporánea puede advertirse ya no como un concepto de tensión en sí mismo -en general-, sino como uno a través del cual se fundamentan otros de igual importancia (el sistema numérico de los reales o los números transfinitos). Así, los trabajos de Dedekind, Cantor, Peirce, Hilbert, entre otros, emplean la idea de continuidad de una manera relativamente más transparente, lo que parece indicar una estabilidad en el uso del concepto y, por tanto, en su estatus epistemológico. Desde luego, lo anterior no implica que la comunidad matemática haya dejado de cuestionar por completo el significado de lo continuo, pues se reconoce la emergencia de miradas como las de Peirce o Brouwer que dan paso a teorías distintas.

## **Resultados**

El análisis histórico del concepto de continuidad evidencia, en los tres momentos estudiados, una tensión constante entre concebir lo continuo como una suma de elementos discretos o como una unidad indivisible en acto, pero divisible en potencia. En la época griega, Aristóteles responde a las paradojas de Zenón y se evidencia cierta tensión en cómo este último vislumbra la continuidad, pues supone que un segmento o intervalo está compuesto de infinitas partes puntuales ya existentes, lo que convierte al continuo en una suma de discretos. Aristoteles, en respuesta, afirma que esta concepción es errónea, porque lo continuo no es un conjunto de unidades separadas sino una entidad en la que los extremos de ciertas partes coinciden formando un solo límite. La tensión se resuelve haciendo uso de la idea de divisibilidad potencial. Por lo tanto, el continuo mantiene una unidad propia, diferente a la unidad numérica de los elementos contables. El resultado más importante de esta tensión es que Aristóteles logra sostener una noción de continuidad que evita dos posturas: la de los atomistas, que buscan mínimos indivisibles y la de Zenón, que reduce la continuidad a una suma infinita de discretos.

La noción de continuidad de Aristóteles muestra que su estudio no se limita a un problema lógico o matemático, sino que está anclado en sus concepciones de la física con fundamentos en la filosofía natural. Como menciona Alejandro de Afrodisias «lo continuo es aquello cuyos extremos son uno y lo mismo» (870.28–871.2 Diels, citado por Shapiro, 2020), no es solo una propiedad de las magnitudes, sino también una condición para comprender los fenómenos naturales como el movimiento, tiempo, lugar y cambio. Por lo tanto, la idea de que las cosas continuas son aquellas cuyos extremos coinciden refuerza la visión del mundo físico como una estructura de elementos unidos por su naturaleza.

Por otro lado, en la época de la Revolución Científica se reaviva la discusión sobre si la continuidad implica una suma de elementos discretos. Galileo, influido por la geometría de los indivisibles, sugiere que las entidades continuas pueden entenderse como compuestas por elementos infinitamente pequeños; sin embargo, al hacer referencia a entidades sin cantidad esta discretitud queda implícita. En contraste, Leibniz rechaza la noción de que el continuo está

formado por partes discretas: para él, el continuo es una unidad íntegra, divisible en teoría, pero no compuesta por elementos previamente separados.

En la Época Contemporánea, la formalización matemática redefine la tensión advertida. Dedekind, al construir los números reales, parece «llenar» la recta con puntos, idea que luego emplea para completar los vacíos que dejan los números racionales sobre la recta numérica. Esta mirada refuerza una visión del continuo como suma -infinita- de discretos; sin embargo, es cuestionada por corrientes como el intuicionismo de Brouwer, que niega la reducción del continuo a un conjunto de puntos y lo entiende como un todo dinámico e indivisible.

En síntesis, el desarrollo histórico de la continuidad muestra que la tensión entre lo discreto y lo continuo no se resuelve definitivamente, sino que reaparece en cada época bajo nuevas formas. Esta persistencia revela tanto la riqueza conceptual del problema como su relevancia en la historia de las matemáticas.

Adicionalmente, y de manera particular, la revisión efectuada también permite reconocer a través de la historia del continuo distintos enfoques para entender la validez en matemáticas (*i.e.*, qué se considera válido y de qué formas se valida una idea en matemáticas), idea que también se entiende de forma distinta en cada momento histórico.

En relación con lo anterior, el estudio realizado revela que el concepto de continuidad no ha permanecido estático, sino que ha adoptado diferentes formas y sentidos epistemológicos según los criterios de validez propios de cada época: la coherencia filosófica y natural en la antigüedad, la eficacia operativa en la Revolución Científica, la rigurosidad de los sistemas axiomático-deductivos en la Época Contemporánea y también, en esta última época, la apertura a nuevas miradas sobre las matemáticas que inducen a otras formas de validación, como las matemáticas intuicionistas.

De manera más detallada, en la Grecia clásica, Aristoteles se sustentaba en la coherencia entre razón, experiencia y a través de la filosofía natural, porque un concepto solo es aceptable si no contradice la experiencia del mundo y explica los fenómenos físicos en armonía con su marco metafísico. Por su parte, Galileo y Leibniz se apoyan en unas matemáticas operativas y experimentales, en las que el énfasis recae en la eficacia procedimental de los conceptos más que en su fundamentación rigurosa. Esta orientación privilegia el uso práctico sobre la formalización teórica, revelando una transición epistemológica en la que lo válido se define

por su capacidad de modelar y explicar fenómenos naturales. Finalmente, en la Época Contemporánea la validez se trasladó al terreno de la rigurosidad mediada por las matemáticas formalistas; así, la continuidad se convirtió en una propiedad que debía ser justificada mediante definiciones precisas. Lo válido ya no era lo evidente por la experiencia o lo útil para el cálculo, sino lo que podía sostenerse dentro de un marco axiomático y lógico.

Otro resultado derivado del trabajo realizado refiere a reconocer los diferentes estatus epistemológicos que ha comportado el concepto de continuidad a lo largo de la historia de las matemáticas. Así, es posible reconocer en la antigua época griega que la continuidad refiere a una relación entre dos elementos (*i. e.*, A y B son elementos continuos si...). Luego, a partir del siglo XVI, la continuidad pasa a ser una propiedad específica de objetos que permiten el estudio y la modelación de fenómenos o entidades físicas como el tiempo y el espacio. Por su parte, durante los siglos XIX y XX la continuidad se reconoce como una propiedad ligada, fundamentalmente, al sistema numérico de los reales, en el marco de la formalización de dicho sistema numérico. Asimismo, en el siglo XX, se vislumbra un tratamiento de la continuidad que difiere en forma y fondo de los anteriores. En este caso la continuidad se comprende como una propiedad que permite reconocer y, en cierto sentido, capturar la cardinalidad de conjuntos infinitos no numerables, como el de los números reales. Es decir, en esta mirada la continuidad no es un objeto de estudio en sí mismo, sino un concepto presente en el marco de las discusiones acerca de la aritméticización de conjuntos infinitos a partir de su cardinalidad.

Este resultado refuerza la idea de que la continuidad, como muchos otros objetos matemáticos, no ha sido inamovible ni transparente a lo largo de su desarrollo histórico. Por el contrario, las comprensiones que se configuran con el paso del tiempo condicionan las caracterizaciones conceptuales y epistemológicas que sobre este se hacen.

## Conclusiones

Entre las conclusiones que se derivan del trabajo realizado, una primera se refiere de forma natural a las limitaciones impuestas por los autores en cuanto a los momentos históricos abarcados. Al seleccionar autores específicos de la historia de las matemáticas (*v. g.* Aristóteles, Leibniz, Dedekind), es evidente que se dejan de lado otros que también contribuyeron de manera significativa a la comprensión del concepto de continuidad. De manera específica, se reconoce que la conceptualización de la continuidad no finaliza con los trabajos de aritmética

transfinita de Cantor. En tal sentido, se reconoce, pues, que las limitaciones contempladas en este trabajo son, a su vez, una puerta abierta para ampliar la propuesta y enriquecerla con las miradas de otros matemáticos durante la historia.

Por otra parte, a partir de los resultados obtenidos se logra reconocer de manera particular una característica de las matemáticas a lo largo de su historia, que es también identifiable a partir del estudio genético de otros objetos; esto es, la especialización que ha ganado el conocimiento matemático con el pasar de los siglos.

En definitiva, el recorrido histórico de la noción de continuidad pone de relieve un proceso de especialización progresiva de los objetos matemáticos y de las matemáticas mismas. En la Antigüedad, bajo la mirada de Aristóteles, la continuidad estaba estrechamente ligada a la filosofía natural, en un marco amplio en el que las matemáticas, la física y la metafísica se entrelazan para dar cuenta y razón de los fenómenos del movimiento, el tiempo y el cambio. En la época de la Revolución Científica, la discusión se acotó hacia una dimensión más pragmática y operativa, en la que la continuidad se utilizaba como herramienta para modelar fenómenos concretos, especialmente en la física del movimiento. Finalmente, en la modernidad, el concepto se restringe al ámbito estrictamente matemático y formal, convirtiéndose en una propiedad rigurosamente definida dentro del sistema de los números reales y la teoría de conjuntos.

Este tránsito, de lo filosófico-natural a lo formal-axiomático, muestra que el estudio de los objetos matemáticos no ha sido lineal ni homogéneo, sino que ha respondido a los contextos y a las necesidades de cada época. La continuidad ejemplifica cómo la validez matemática y la naturaleza de los objetos se redefinen históricamente, pasando de ser categorías amplias y vinculadas a la explicación de la naturaleza, a constituirse en nociones cada vez más especializadas, abstractas y autónomas dentro del desarrollo de las matemáticas.

Por otro lado, el análisis ofrece una proyección pedagógica. Comprender las dificultades conceptuales que atravesaron pensadores como Aristóteles, Galileo, Leibniz o Dedekind al enfrentarse a la noción de continuidad, abre un horizonte para la enseñanza. Reconocer que incluso en la historia de las matemáticas se han planteado debates, contradicciones y reformulaciones en torno a este concepto, permite a los profesores de matemáticas situar las

dificultades de aprendizaje de sus estudiantes en una tradición más amplia y diseñar propuestas didácticas que recuperen la riqueza histórica y epistemológica sobre la continuidad.

En conclusión, el recorrido histórico de la continuidad muestra cómo este objeto ha sido redefinido de acuerdo con las preguntas y criterios de validez de cada época, transitando de la filosofía natural a la formalización axiomática, y manteniendo viva una tensión fundamental entre lo discreto y lo continuo. A su vez, esto evidencia que la validez matemática no es un estándar universal y atemporal, sino un atributo histórico, cambiante y dependiente de los paradigmas culturales, científicos y filosóficos de cada época.

Así, este proceso no sólo da cuenta y razón de la naturaleza dinámica de los objetos matemáticos, sino que también refuerza la idea de que las matemáticas son una construcción histórica, sujeta a cambios y especializaciones, pero siempre abierta a nuevas formas de comprensión.

### **Palabras clave**

Continuidad, historia de las matemáticas, Aristóteles, Galileo, Dedekind, números reales.

### **Referencias**

- Arbeláez, G., y Gálvez, F. (2011). El conjunto de los números reales como objeto matemático: la “construcción” de Dedekind. En L. Recalde y G. Arbeláez (Eds.), *Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica* (pp. 135-161). Universidad del Valle.
- Fernández, J. (2017). *Un acercamiento a los fundamentos del cálculo. El infinito y los números reales*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Hayashi, T. (2017) The Continuum: History, Mathematics, and Philosophy [tesis doctoral], University of Calgary, Canada.
- Jesseph, D. M. (2021). The Indivisibles of the Continuum: Seventeenth-Century Adventures in Infinitesimal Mathematics. En S. Shapiro & G. Hellman (Eds.), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives* (pp. 104–123). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198809647.003.0006>

- Levey, S. (2021a). Continuous Extension and Indivisibles in Galileo. En S. Shapiro & G. Hellman (Eds.), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives* (pp. 82–104). Oxford University Press.  
<https://doi.org/10.1093/oso/9780198809647.003.0005>
- Levey, S. (2021b). The Continuum, the Infinitely Small, and the Law of Continuity in Leibniz. En S. Shapiro & G. Hellman (Eds.), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives* (pp. 123–158). Oxford University Press.  
<https://doi.org/10.1093/oso/9780198809647.003.0007>
- Recalde, L. (2011). La caracterización conjuntista de los números reales: del dominio de las magnitudes al dominio de los conjuntos. En L. Recalde y G. Arbeláez (Eds.), *Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica* (pp. 193-225). Universidad del Valle.
- Sattler, B. (2020). The concept of motion in ancient Greek thought foundations in logic, method, and mathematics. Cambridge University Press.  
<https://doi.org/10.1017/9781108775199>
- Shapiro, S., y Hellman, G. (2021) *The history of continua. Philosophical and mathematical perspectives*. Oxford University Press.
- Valencia, A. (2010). *Una Construcción Alternativa al Continuo de Cantor: El Continuo Intuicionista*. 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá D. C.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## On the Global Regularity of the Navier-Stokes Equations

Brian David Vásquez Campos  
Professor of Mathematics, University of Tolima  
bdvasquezc@ut.edu.co

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Keywords

Navier-Stokes Equation, Riez convolution, spaces of functions that decrease fast, spaces of functions dominated by Fourier Caloric functions, global solution.

### Extended Summary

The Navier-Stokes equations, which describe the motion of fluid substances, were independently introduced by Claude-Louis Navier [CN23] and George Gabriel Stokes [Sto45] in the early 19th century. Claude-Louis Navier, a French engineer and physicist, introduced the equations in 1822. George Gabriel Stokes, an Irish mathematician and physicist, later refined and expanded upon Navier's work, contributing significantly to the development of the equations in 1845. Their combined efforts form the foundation of fluid dynamics as we understand it today.

The vector-valued form of the Navier-Stokes Equation is given by

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u = \nu \Delta u - \nabla p + f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(u) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad (3)$$

for  $(u, p) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1}, \mathbb{R}^{d+1})$  such that  $u(x, t) \in \mathbb{R}^d$  is the velocity and  $p(x, t) \in \mathbb{R}$  is the pressure. Equation (2) means that  $u$  is a divergence-free vector field.

Here,  $\nu > 0$  is the viscosity, the external force  $f : \mathbb{R}_+^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  and the initial velocity  $u^0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  are smooth functions that decrease fast, i.e.,  $f \in S(\mathbb{R}_+^{d+1})^d$  and  $u^0 \in S(\mathbb{R}^d)^d$ .

Additionally we require that the solution  $(u, p) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1}, \mathbb{R}^{d+1})$  of the Navier-Stokes Equation satisfies the bounded energy condition

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x, t)|^2 dx < \infty. \quad (4)$$

The existence and smoothness problem of Navier-Stokes equations for  $d = 2$  has a positive answer (See [Ser61]). A fundamental difference between the Navier-Stokes Equation and Euler Equation (the case  $\nu = 0$ ) is that in the latter the existence of solutions with finite blow up time  $T > 0$  implies that the norm  $L^{\infty, 1}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$  of the vorticity  $\omega(x, t) = \operatorname{curl}_x u(x, t)$  is infinite ([Con01, MB02]).

In [Ler34], Leray showed the existence of weak solutions of the Navier-Stokes Equation. The partial regularity Theory of the Navier-Stokes Equation started with Scheffer [Sch76] and also for suitable solutions in the work of Caffarelli-Kohn-Nirenberg [CKN82]. A direct and simplified proof of the main result of [CKN82] can be found in the work of Lin [Lin98].

In [FK64], Fujita and Kato showed the existence of classical solutions to the three dimensional Navier-Stokes equations when the initial data  $u^0$  has small norm in a certain Sobolev space. The

authors deduced this by reducing the initial value problem for the Navier-Stokes equations to an abstract initial value problem for an operator differential equation in a Hilbert space.

In [Tao16], Tao demonstrates the existence of a blowup solution for an averaged version of the Navier-Stokes equation, suggesting that these ideas could indicate a negative answer to the global regularity problem by constructing a blowup solution for the true Navier-Stokes equation. This would be equivalent to affirming Navier-Stokes problem (C) proposed in [Fef06], which addresses the breakdown of Navier-Stokes solutions in  $\mathbb{R}^3$ .

In [Tao13], Tao investigates the implications between various formulations of the Navier-Stokes regularity problem in three dimensions. The conjectures discussed pertain to the existence of smooth or mild solutions and local or global quantitative bounds for both homogeneous and general cases.

In this presentation, we give a sufficient condition to guarantee the existence of a smooth solution of the  $d$ -dimensional Navier-Stokes equation with nice decreasing properties at infinity for  $d \geq 3$ . In this way, we prove the existence of smooth physically reasonable solutions to the Navier-Stokes problem. Additionally, we show the existence of a smooth curve of entire vector fields of order 2 that extends the solution to the complex domain for positive time.

To clarify the ideas we state the main results as follows:

**Theorem 1** (Sufficiency for Existence and smoothness of Navier-Stokes solutions on  $\mathbb{R}^d$  depending on relation of parameters). *Take  $\nu > 0$  and  $d \geq 3$ . Let  $u^0 \in S(\mathbb{R}^d)^d$  be any divergence-free vector field such that  $\left\| |\cdot|^{\frac{d+1}{2}} \widehat{u^0} \right\|_{1 \oplus 2} < C\nu$  for a dimensional constant  $C > 0$ . Take  $f(x, t)$  to be identically zero. Then there exists smooth function  $(u, p) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1}, \mathbb{R}^{d+1})$  that satisfy equations (1), (2), (3) and (4).*

**Theorem 2.** *The solution  $(u, p)$  of the above initial value problem under the above conditions can be extended to a smooth curve  $t \rightarrow (U(\cdot, t), P(\cdot, t))$  in the space of entire functions of second order.*

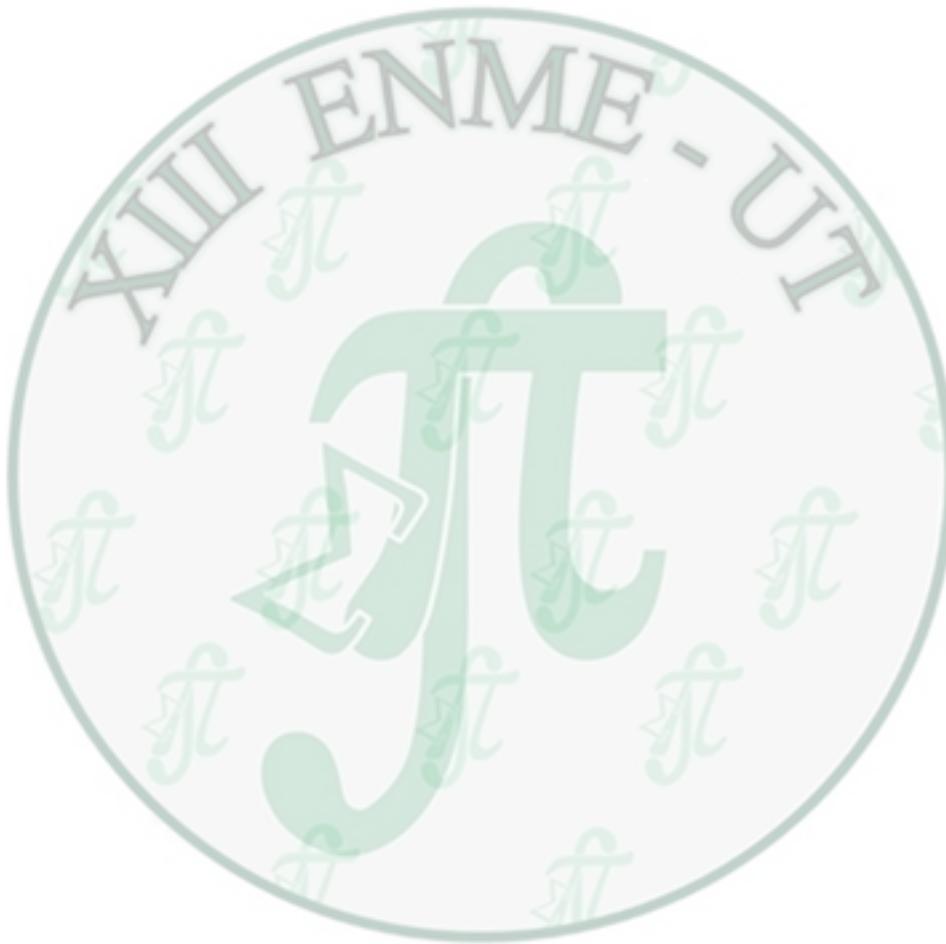
**Remark 1.** For a function in  $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$  we denote  $\|f\|_{p \oplus q} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$ .

We got this after studying remarkable spaces of functions  $\mathcal{V}_\alpha(\mathcal{E})$  dominated by Fourier Caloric functions with initial condition in a space of functions  $\mathcal{E}$  decreasing fast, furthermore we obtain as a byproduct the existence of a smooth curve of entire functions of order 2 for positive time that extend the solution  $(u, p)$  of the Navier-Stokes Equation to the complex domain.

## References

- [CKN82] L. Caffarelli, R. Kohn, and Louis Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 35:771–831, 1982.
- [CN23] Navier C. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. Number 6. Mémoires de l’Academie Royale des Sciences de l’institut de France, 1823.
- [Con01] Peter Constantin. Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 353–360. Berlin: Springer, 2001.
- [Fef06] Charles L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. In *The Millennium Prize problems*, pages 57–67. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2006.
- [FK64] H. Fujita and Tosio Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 16:269–315, 1964.
- [Ler34] Jean Leray. Sur le mouvement d un liquide visqueux emplissant l espace. *Acta Mathematica*, 63(none):193 – 248, 1934.
- [Lin98] Fanghua Lin. A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem. *Commun. Pure Appl. Math.*, 51(3):241–257, 1998.

- [MB02] Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*. Camb. Texts Appl. Math. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [Sch76] Vladimir Scheffer. Turbulence and Hausdorff dimension. *Turbul. Navier Stokes Equat., Proc. Conf. Univ. Paris-Sud, Orsay 1975, Lect. Notes Math. 565, 174-183 (1976.)*, 1976.
- [Ser64] James Serrin. The mathematical theory of viscous incompressible flow (o. a. ladyzhenskaya). *SIAM Review*, 6(3):315–316, 1964.
- [Sto45] G.G. Stokes. *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*. Number 8. Trans. Cambridge Philos. Soc, 1845.
- [Tao13] Terence Tao. Localisation and compactness properties of the Navier-Stokes global regularity problem. *Anal. PDE*, 6(1):25–107, 2013.
- [Tao16] Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation. *J. Am. Math. Soc.*, 29(3):601–674, 2016.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## SIMETRÍA ÁUREA PRIMA: UNA PARTICIÓN DORADA CICLOTÓMICA

JAVIER GRISALES HERRERA

Filiación: Universidad del Tolima , Ibagué, Colombia  
e-mail: [jgrisalesher@ut.edu.co](mailto:jgrisalesher@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3 al 5 de 2025

### 1 RESUMEN

En este trabajo de investigación se demuestra la relación matemática inédita descubierta por el autor, acerca de la existencia de una relación de equivalencia sobre el conjunto infinito de los números primos. Los antiguos geómetras griegos se plantearon el problema de dividir una circunferencia en partes iguales solamente usando regla y compás. Este problema se conoce hoy como **ciclotomía**. Por otro lado, la simetría es la invariancia de objetos matemáticos bajo ciertas transformaciones (i.e. es el cambio sin cambio). Por ejemplo, una función sobre la permutación de los vértices de un polígono regular que preserva las distancias y los ángulos entre ellos, entre cada par de puntos. Esto es una isometría, un isomorfismo que preserva la métrica. Al conjunto de simetrías del pentágono regular se le llama Grupo Diédrico  $D_5$ . Y está formado por 5 rotaciones y 5 reflexiones. Los grupos de simetría de rotaciones  $SO(2)$  y  $SO(3)$  son un ejemplo de grupos de Lie.

Ahora bien, ¿qué relación existe entre estos grupos de simetría de rotación del pentágono regular y la primalidad de los enteros? En este trabajo voy a demostrar que la proporción áurea induce una partición de los números primos en 8 clases primas de equivalencia correspondientes a 8 ángulos invariantes de rotación o isometrías de 2 pentágonos opuestos en el plano complejo. Análogamente, existe otra relación de equivalencia sobre el conjunto infinito de los duodécimos números de Fibonacci  $F_{12(5m+j)}$ , que tiene las mismas propiedades para otros dos pentágonos opuestos en el plano complejo. A tenor de lo expuesto, declaro algunos de mis teoremas principales:

**Teorema 1.** *Para cada primo  $p > 5$ , si  $p^{-1}(10^{p-1} - 1)$  es el período decimal de los reciprocos de los números primos, entonces se define:*

$G : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R} : p \rightarrow G(p)$ , que satisface:

$$G(p) = 2 \sin(2p^{-1}(10^{p-1} - 1))^\circ = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

### Proposición 1.

Los primos penult-imparson aquellos primos cuyo penúltimo dígito es impar. Y son congruentes con 11, 13, 17, 19 módulo 20.

$$P_{1impar} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 11 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 18 \pmod{360}\}.$$

$$P_{3impar} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 13 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 126 \pmod{360}\}.$$

$$P_{7impar} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 17 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 54 \pmod{360}\}.$$

$$P_{9impar} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 19 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 162 \pmod{360}\}.$$

### Proposición 2.

Los primos penulti-pares son aquellos primos cuyo penúltimo dígito es par. Y son congruentes con 1, 3, 7, 9 módulo 20.

$$P_{1par} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 1 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 198 \pmod{360}\}.$$

$$P_{3par} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 3 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 306 \pmod{360}\}.$$

$$P_{7par} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 7 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 234 \pmod{360}\}.$$

$$P_{9par} = \{p \in \mathbb{P} : p \equiv 9 \pmod{20}\} = \{p \in \mathbb{P} : 2p^{-1}(10^{p-1} - 1) \equiv 342 \pmod{360}\}.$$

### Teorema 2.

Para cada duodécimo número de Fibonacci de la forma  $F_{12(5m+j)}$ , sea  $k = 5m + j$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , donde  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ , se define:

$H : \mathbb{F}_{12(5m+j)} \rightarrow \mathbb{R} : k \mapsto H(k)$ , que satisface:

$$H(k) = 2 \cos(F_{12(5m+j)}) = \{-\varphi, \varphi^{-1}\}. \quad (2)$$

$$H(k) = 2 \cos(F_{12(5m+j)} - 180) = \{\varphi, -\varphi^{-1}\}. \quad (3)$$

### Proposición 3.

Sea  $F_{12(5m+j)}$ , tal que  $k = 5m + j$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Las 8 clases de equivalencia de los duodécimos Fibonacci para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ , se cumple:

$$F_{12k} \equiv 144 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} \equiv 288 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} \equiv 72 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 3 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} \equiv 216 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 4 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} - 180 \equiv 324 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} - 180 \equiv 108 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} - 180 \equiv 252 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 3 \pmod{5}.$$

$$F_{12k} - 180 \equiv 36 \pmod{360} \Leftrightarrow k \equiv 4 \pmod{5}.$$

La simetría áurea prima es la relación analítica y algebraica entre la proporción áurea y los números primos, mediante ciertas funciones trigonométricas en el plano real y complejo bajo la forma de clases de equivalencia que corresponden a los ceros de ciertos polinomios ciclotómicos.

La simetría áurea prima consta de 8 familias infinitas de clases primas que rotan en matrices como ángulos áureos (reales o complejos). Estas isometrías áureas primas, son 8 raíces quintas en el plano complejo y son las siguientes:  $\{ i^{1/5}, i^{3/5}, i^{7/5}, i^{9/5}, i^{-1/5}, i^{-3/5}, i^{-7/5}, i^{-9/5} \}$ . Corresponden a los ceros del polinomio ciclotómico  $\Phi_{20}(x) = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$ . Es decir, aquí estamos frente a una nueva distribución algebraica de los números primos.

## 2 Palabras clave

Álgebra de Lie, ciclotomía, números primos, número áureo, duodécimos Fibonacci.

## References

- [1] Beshenov, Alexey. *Teoría de números algebraicos*, CIMAT, 2020, p.66.
- [2] Bloom, D.M. *On the coefficients of the cyclotomic polynomials*. Amer. Math. Monthly, 75:372–377, 1968. MR0227086 (37:2671)
- [3] Ginsberg, B. (2004). Midy's (nearly) secret theorem - an extension after 165 years. College Mathematics Journal, 35(1): 26-30.
- [4] Gray, Alexander J. (2000). *Digital roots and reciprocals of primes*, Mathematical Gazette 84.09, 86 pp.
- [5] Grisales, Javier. (2025). *Golden Prime Symmetry*. Researchgate. [https://www.researchgate.net/publication/390137699\\_Golden\\_Prime\\_Symmetry](https://www.researchgate.net/publication/390137699_Golden_Prime_Symmetry)
- [6] Gupta Ankit and Sury B. (2005). *Decimal expansion of 1/p and subgroup sums*. Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 5, A19.
- [7] Hoggatt, Verner. (1969). "Fibonacci and Lucas numbers". The Fibonacci association. University of Santa Clara.
- [8] Kak, Subhash, Chatterjee A. (1981). *On decimal sequences*. IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-27, 647-652 pp.
- [9] Kalman, Dan (1996). *Fractions with Cycling Digit Patterns*. The College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 2. 109-115 pp.
- [10] Lewittes Joseph (2007). *Midy's theorem for periodical decimals*. Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 7.
- [11] Martin, H. (2007). Generalizations of Midy's theorem on repeating decimals. Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 7(1):19–25.
- [12] Rademacher, H. and Toeplitz, O. "The enjoyment of mathematics: Selections from mathematics for the amateur", Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957, p. 158-160.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Ecuaciones de tipo Kirchhoff con crecimiento exponencial

**Jesús Alberto Leon Tordecilla**

**Universidad del Sinú, Cartagena, Colombia,**  
**e-mail: jesus.leon@unisinu.edu.co**

**Ibagué, Colombia**  
**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

### **Resumen**

Los problemas no locales han sido estudiados intensamente desde su primera aparición en el trabajo seminal de Kirchhoff [6] que estudió una ecuación de onda que es una generalización de la ecuación de D'Alembert que modela las vibraciones libres de cuerdas elásticas. Esta es una de las motivaciones por las que estos problemas fueron investigados por varios autores, empezando por Lion [7], Pohovzaev [8] y Bernstein [2]. Para la literatura más reciente sobre este tipo de problemas de tipo Kirchhoff, utilizando diferentes enfoques, citamos los trabajos [1, 3, 4, 5, 9, 10, 11]. En esta charla estudiaremos la existencia de soluciones positivas para un problema de tipo Kirchhoff con crecimiento exponencial, abarcando nuevos enfoques, que hasta ahora han sido poco estudiado.

### **Palabras clave**

Ecuación de Kirchhoff, existencia de solución.

### **Referencias**

- [1] Alves, C. O., & Covei, D. P. (2015). Existence of solution for a class of nonlocal elliptic problem via sub-supersolution method. *Nonlinear Anal.* 23, 1-8.
- [2] Bernstein, S. (1940). Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 4, 17-26.
- [3] Chen, S., Radulescu, V. D., Tang, X., & Wen, L. (2022). Planar Kirchhoff Equations with Critical Exponential Growth and Trapping Potential. *Math. Zeitschrift.* 302, 1061-1089.
- [4] Chen, S., Tang, X.H., & Wey, J.Y. (2021). Improved results on planar Kirchhoff-type elliptic problems with critical exponential growth. *Z. Angew. Math. Phys.* 72, 1-18.
- [5] Chen, S., & Yu, F. (2022). On a nonhomogeneous Kirchhoff-type elliptic problem with critical exponential in dimension two. *Appl. Anal.* 101, 421-436.
- [6] Kirchhoff, G. (2883). Mechanik. Teubner, Leipzig.
- [7] Lions, J.L. (1978). On some questions in boundary value problems of mathematical physics. in: G.M. de la Penha, L.A. Medeiros (Eds.), *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and PDE's*, North-Holland, Amsterdam.

- [8] Pohozaev, S. I. (1975). On a class of quasilinear hyperbolic equations. *Math. Sborniek* 25, 145-158.
- [9] Tordecilla, J.A.L. (2024). A planar Kirchhoff equation with exponential growth and double nonlocal term. *J. Math. Anal. Appl.* 40, 1-8
- [10] Tordecilla, J.A.L. (2022). Existence of solutions to nonlocal elliptic problems with singular and combined nonlinearities. *Electron. J. Differential Equations* 537, 1–16.
- [11] Tordecilla, J.A.L. (2024). Positive solution for a singular and nonlocal problem of the N-Kirchhoff type. *Appl. Anal.*, 1-13



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Un método Newton Inexacto para resolver la  
ecuación cuadrática matricial

EDUARD MAURICIO MACÍAS CAICEDO

Filiación: Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

e-mail: [mauromac@unicauba.edu.co](mailto:mauromac@unicauba.edu.co)

ROSANA PÉREZ MERA

Filiación: Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

e-mail: [rosana@unicauba.edu.co](mailto:rosana@unicauba.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Muchas aplicaciones emergentes en la ciencia e ingeniería requieren de la solución de la llamada ecuación cuadrática matricial

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = 0, \quad (1)$$

con  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Entre las aplicaciones encontramos: *problemas estocásticos* [1], *el análisis dinámico de mecánica estructural y sistemas acústicos*, *simulación de circuitos eléctricos*, *mecánica de fluidos*, *procesamiento de señales*, *problemas de vibración y modelamiento de sistemas mecánicos microelectrónicos* [2].

Se llama solvente a cualquier matriz  $X$  que satisfaga la ecuación (1). Respecto a los solventes de la ecuación cuadrática matricial es importante mencionar que el *Teorema Fundamental del Álgebra* no se extiende a polinomios matriciales, es decir, la ecuación (1) podría tener más de dos solventes [3].

Casos particulares de la ecuación (1) han dado lugar al desarrollo de algoritmos tipo Newton y de su respectiva teoría de convergencia [3]. Un ejemplo de ello es el estudio y análisis de convergencia de la ecuación  $X^2 - A = \mathbf{O}$  realizados en [6].

Respecto a la solución numérica de la ecuación cuadrática matricial, se destacan algoritmos basados en la *descomposición de Schur* [3], algoritmos basados en sus

propiedades teóricas [1], algoritmos tipo Newton [4] y recientemente algoritmos secantes [5].

Con el objetivo de reducir el costo computacional que representa la solución de (1), para problemas de gran tamaño, mediante el tradicional método de Newton, en este trabajo, proponemos un algoritmo tipo Newton inexacto que consiste en encontrar una aproximación a la solución de la ecuación lineal asociada a la iteración básica del método de Newton clásico. Para la propuesta algorítmica demostramos que esta converge local y hasta cuadráticamente a un solvente de (1). Además, mostramos numericamente que el algoritmo propuesto es competitivo frente a otros del mismo tipo.

## Palabras claves

Convergencia cuadrática, ecuación cuadrática matricial, Newton inexacto, solvente.

## Referencias

- [1] Sang-Hyup, S. Jong Hyun, S. and Hyun-Min K. (2018). Convergence of a modified Newton method for a matrix polynomial equation arising in stochastic problem, *Electron. J. Linear Algebra*, 34, 113-124 pp. doi:10.13001/1081-3810.3762.
- [2] H. A. Smith, R. K. Singh, D. C. and Sorensen, D. C. (1995). Formulation and solution of the non-linear, damped eigenvalue problem for skeletal systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 (18), 3071-3085 pp. doi:10.1002/nme.1620381805.
- [3] Higham, N. J. and Kim, H. (2000). Numerical analysis of a quadratic matrix equation, *IMA J. Numer. Anal.*, 20 (4), 499-519 pp. doi:10.1093/imanum/20.4.499.
- [4] Higham, N. J. and Kim, H. Solving a quadratic matrix equation by Newton's methods with exact line searches, (2001). *SIAM.*, 23 (2), 303-316.
- [5] Macías, E. M. Métodos secantes de cambio mínimo para el cálculo de ceros de funciones de matrices. *Magister thesis*. Universidad del Cauca. 2013.
- [6] Higham, N. J. (2008). Functions of matrices theory and computations. *SIAM.*

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Conjuntos producto pequeños en grupos  
metacíclicos de orden par.

DR. WILSON FERNANDO MUTIS CANTERO.

Filiación: Universidad de Nariño, Pasto - Nariño, Colombia  
e-mail: [wilsonmutis@udenar.edu.co](mailto:wilsonmutis@udenar.edu.co)

DR. FERNANDO ANDRÉS BENAVIDES AGREDO

Filiación: Universidad de Nariño, Pasto - Nariño, Colombia  
e-mail: [fandresbenavides@udenar.edu.co](mailto:fandresbenavides@udenar.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Sea  $G$  un grupo finito y sean  $r$  y  $s$  dos enteros positivos. Un problema difícil, en términos computacionales, y de interés en álgebra, es determinar la mínima cardinalidad del conjunto producto  $AB$ , en la cual  $A$  y  $B$  son dos subconjuntos de  $G$ , tales que  $|A| = r$  y  $|B| = s$ . Este problema ha sido resuelto para la clase de grupos abelianos y para algunas clases de grupos no abelianos finitos. Sin embargo, no se conoce una solución general para grupos finitos no abelianos. En esta ponencia demostramos por inducción que el resultado obtenido para grupos abelianos puede extenderse a la clase de grupos metacíclicos  $K_{m,n}$  con presentación,

$$K_{m,n} = \langle a, b : a^m = 1, b^{2n} = a^g, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Con este resultado proporcionamos una nueva demostración del resultado obtenido en la clase de grupos diédricos y en la clase de grupos dicíclicos.

## Palabras claves

Conjunto producto, Grupo metacíclico, grupo no abeliano.

## Referencias

- [1] Eliahou, S and Kervaire, M. *Minimal sumsets in infinite abelian groups*, Journal of Algebra 287 (2005), 449-457.
- [2] Plagne, A. *Optimally small sumsets in general Abelian groups*. Advances in Applied Mathematics , 38,(2007), 324-326.
- [3] Eliahou, S and Kervaire, M. *Minimal sumsets in finite solvable groups* ,Discrete Mathematics 310 (2010), 471-479.
- [4] Eliahou, S and Kervaire, M. *Sumsets in dihedral groups*, European Journal of Combinatorics 27 (2006), 617-628.
- [5] Mutis W, Benavides F and Castillo J. *Conjuntos suma pequeños en p-grupos finitos* (2010).
- [6] Mutis W, Benavides F and Castillo J. *Conjuntos suma pequeños en grupos hamiltonianos*, Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. 53, No. 1, (2012), 1-9.
- [7] Deckelbaum, A. *Minimum product set sizes in nonabelian groups of order pq*, Journal of Number Theory, 129 (2009), No. 6, 1234-1245.
- [8] Berchenko-Kogan, Yakov. *Minimum product sets sizes in nonabelian groups*. Journal of Number Theory, 132, (2012), 2316-2335.
- [9] Kaur, Ramandeep and Singh, Sandeep. *Sumsets in dicyclic groups  $Q_{4n}$  and  $U_{m,n}$* . Communications in Algebra, Vol. 52, 2024, No. 3, 1255-1259.
- [10] Eliahou S, Kervaire M and Plagne A, *Optimally small sumsets in finite abelian groups*, J. Number Theory 101 (2003) 338-348.
- [11] Xu Yang, *The Subgroups of Finite Metacyclic Groups*, Chinese Annals of Mathematics, Series B. 41(2), 2020, 241-266.
- [12] Eliahou, S and Kervaire, M. *The small sumsets property for solvable finite groups*, European Journal of Combinatorics 27 (2006), 1102-1110.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Una extensión de las funciones de complementariedad al espacio real tridimensional

CARLOS ORDOÑEZ Y JHON SALAZAR

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia

e-mail: [jhasalzar@unicauca.edu.co](mailto:jhasalzar@unicauca.edu.co)

CARLOS ANDRES ARIAS TORRES

Filiación: Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

e-mail: [carlosarias@unicauca.edu.co](mailto:carlosarias@unicauca.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Una función de complementariedad [3, 5] es un campo escalar  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\varphi(a, b) = 0 \quad \text{si, y solo si} \quad a \geq 0, b \geq 0 \text{ y } ab = 0. \quad (1)$$

El estudio de estas funciones ha cobrado gran importancia en los últimos años, ya que estas permiten reformular diversos problemas de complementariedad [1, 2, 4], los cuales surgen de manera natural en campos como la ingeniería, la física y la economía, entre otros. Vale la pena decir que los problemas de complementariedad pretenden establecer un equilibrio entre dos o más variables; sin embargo, las funciones definidas en (1) permiten la reformulación de dichos problemas solo para el caso en el que intervienen dos variables. Teniendo en cuenta lo anterior y en aras de ampliar la teoría y los métodos numéricos existentes, en este trabajo de investigación realizamos los siguientes aportes:

1. Extendemos el concepto de función de complementariedad al espacio real tridimensional.

2. Demostramos la existencia de funciones de complementariedad en el espacio real tridimensional. Más aún, proponemos una forma de construcción de dichas funciones.
3. Demostramos algunas propiedades geométricas y analíticas de las funciones de complementariedad construidas en  $\mathbb{R}^3$ .
4. Mostramos cómo las funciones de complementariedad definidas en  $\mathbb{R}^3$  pueden ser usadas para reformular problemas de complementariedad en los que se requiere el equilibrio de tres variables.

## Palabras claves

Función de complementariedad, métodos numéricos, problemas de complementariedad.

## Referencias

- [1] Francisco Facchinei, Jong-Shi Pang, et al. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems Volume I*. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [2] Michael C Ferris and Jong-Shi Pang. Engineering and economic applications of complementarity problems. *Siam Review*, 39(4):669–713, 1997.
- [3] Aurél Galántai. Properties and construction of ncp functions. *Computational Optimization and Applications*, 52:805–824, 2012.
- [4] Rosana Pérez Mera, Favián Enrique Arenas, Héctor Jairo Martínez, and Carlos Andrés Arias. *El problema de complementariedad No lineal: Teoría, aplicaciones y nuevos algoritmos para su solución*. Universidad del Valle, 2019.
- [5] Longquan Yong. Nonlinear complementarity problem and solution methods. In *Artificial Intelligence and Computational Intelligence: International Conference, AICI 2010, Sanya, China, October 23-24, 2010, Proceedings, Part I* 2, pages 461–469. Springer, 2010.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

The nonsingularity assumption in Newton's  
method for solving the nonlinear complementarity  
problem

WILMER SÁNCHEZ GRUESO

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia  
e-mail: [wilmersanchez@unicauca.edu.co](mailto:wilmersanchez@unicauca.edu.co)

CARLOS ANDRÉS ARIAS

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia  
e-mail: [email\\_institucional](mailto:email_institucional)

ROSANA PÉREZ

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia  
e-mail: [email\\_institucional](mailto:email_institucional)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

En este trabajo consideramos el problema de complementariedad no lineal y la llamada hipótesis de BD-regularidad en una solución del problema, la cual se usa tradicionalmente para desarrollar la teoría de convergencia de métodos tipo Newton que lo resuelven. Mediante la reformulación del problema como un sistema de ecuaciones no lineales, no diferenciables usando una familia uniparamétrica de funciones de complementariedad demostramos que existe una relación entre la hipótesis y el parámetro que define la familia. Además, analizamos numéricamente la sensibilidad de la familia a degeneraciones en la solución del problema. Esta investigación permite concluir que es posible encontrar matrices singulares en el jacobiano generalizado dependiendo de la elección del parámetro de la familia y muestra qué tan sensibles son las matrices del jacobiano generalizado a variaciones del parámetro, lo cual es de interés para el análisis del desempeño de algoritmos tipo Newton para complementariedad no lineal.

## Palabras claves

BD-Regularidad, Complementariedad no lineal, Jacobiano generalizado, Método de Newton.

## Referencias

- [1] Rosana Pérez, Favián Arenas, Héctor Martínez y Carlos Arias (2019). El Problema de Complementariedad No lineal: Teoría, aplicaciones y nuevos algoritmos para su solución, *Programa Editorial Universidad del Valle*.
- [2] Christian Kanzow and Helmut Kleinmichel (1998). A new class of semismooth Newtontype methods for nonlinear complementarity problems, *Comput. Optim. Appl.*, 11, 227-251.
- [3] Wilmer Sánchez, Rosana Pérez, and Héctor Martínez (2021). An global jacobian smoothing algorithm for nonlinear complementarity problems, *Revista integración temas de matemáticas*, 39, 191-215.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Caracterización de dos Modelos Matemático para la Dinámica Tumor-Sistema Inmune en Cáncer de Mama

*Daniel Felipe Tavera Castaño<sup>a</sup>, Juan Andrés Reyes Olivares<sup>b</sup>, Alexander Santos Niño<sup>c</sup>*

*a. Licenciatura en Matemáticas, Universidad de los Llanos, Villavicencio (Meta).*

*b. Licenciatura en Matemáticas, Universidad de los Llanos, Villavicencio (Meta).*

*c. Universidad de los Llanos, Villavicencio (Meta).*

La complejidad biológica del cáncer de mama ha impulsado numerosas investigaciones para comprender su crecimiento y progresión. Las hormonas juegan un papel clave en la proliferación celular, la supervivencia y la respuesta a tratamientos, lo que ha llevado a integrar modelos matemáticos para predecir la progresión tumoral y la efectividad de las terapias (Clarke et al., 2015).

El uso de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en el modelado del cáncer permite describir cuantitativamente su evolución y simular escenarios terapéuticos (Eftimie et al., 2010). Esta herramienta cobra sentido debido a las interacciones entre componentes del microambiente del tumor, debido a esto los modelos se enfocan en describir el crecimiento del tumor y su interacción con el entorno. Por ejemplo, para incluir la interacción con el sistema inmune, un modelo similar al de presa-depredador fue desarrollado por Stepanova (1979), que considera un crecimiento logístico con la respuesta inmunitaria de células efectoras genéricas activadas por la presencia tumoral; este es estudiado y ajustado a la función de crecimiento de Gompertz. Aunque los modelos basados en EDO requieren calibración con datos experimentales y no capturan la variabilidad espacial ni la heterogeneidad tumoral, siguen siendo herramientas clave para predecir la evolución del cáncer y evaluar estrategias terapéuticas (Eftimie et al., 2010).

En el modelo propuesto por Stepanova, es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{p} = \xi pF(p) - \theta pr \quad (1)$$

$$\dot{r} = \alpha(1 - \beta p)pr + \gamma - \delta r \quad (2)$$

Donde el volumen tumoral  $p$  y la densidad de células inmunocompetentes (efectoras genéricas)  $r$  son las variables principales. Teniendo en cuenta que el sistema inmune actúa gracias a la participación de las células efectoras genéricas, que mayormente son linfocitos o células T y se encuentran en especial en los órganos linfoideos.

El parámetro  $\gamma$  modela una tasa combinada de afluencia de células T generadas a través de estos órganos primarios,  $\delta$  es la tasa de muerte natural de las células T, el término  $\alpha pr$  considera que el crecimiento es estimulado por el volumen de los tumores cuando son pequeños y la actividad autoinmune se suprime cuando hay tumores grandes, reflejándose en el término  $2\beta pr$ . De esta manera puede considerarse un valor límite  $\frac{1}{\beta}$  en donde el tumor deja de estimular la aparición de células T.

En la primera ecuación  $\beta$  corresponde a la tasa de crecimiento del tumor y  $F(p)$  es una función sigmoidal que restringe el crecimiento exponencial. El segundo término considera los efectos del sistema inmune en la supresión del tumor a través de la actividad de las células T, de tal manera que  $\beta$  es la razón por la que las células

tumorales son eliminadas.

Algunas propiedades cualitativas pueden verse a partir de la elección de  $F(p)$  ya que las soluciones a este modelo exhiben una gran variedad de escenarios médicos realistas. Para este sistema, consideramos cuatro funciones sigmoides, el modelo de Gompertz  $F_G = -\log(\frac{p}{p_\infty})$ , el Logístico Clásico,  $F_L = 1 - \frac{p}{p_\infty}$  el Logístico Generalizado  $F_{GL} = 1 - (\frac{p}{p_\infty})^2$  y el Exponencial  $F_E = 1$ . Algunas trayectorias en los diagramas de fase se presentan en la Figura 1, donde los puntos fijos representan latencias tumorales. Los parámetros utilizados en estas simulaciones son los propuestos por Schättler y Ledzewicz (2015).

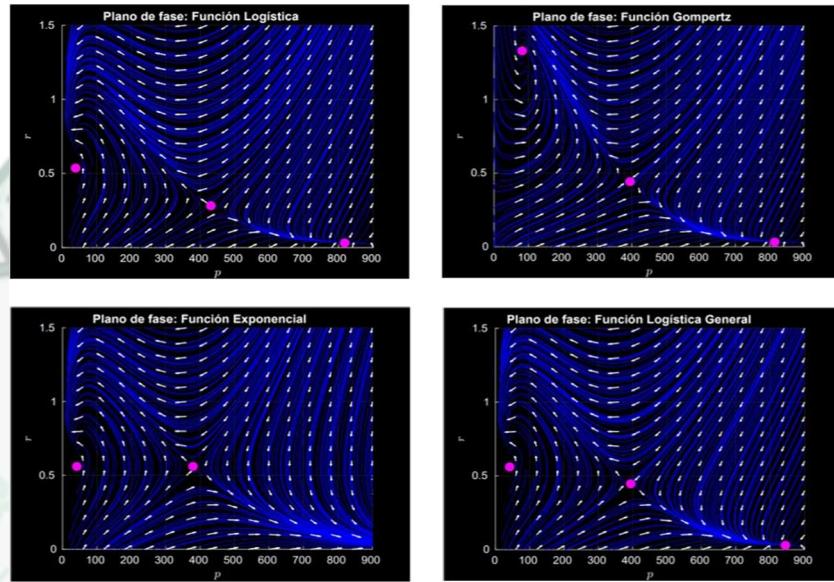


Figura 1: Diagramas de Fase para las funciones sigmoides de crecimiento tumoral. Las trayectorias se representan por líneas azules mientras que los puntos fijos se muestran en magenta.

El modelo de Stephanova es restrictivo ya que el tumor interactúa con células efectoras genéricas. Para estudiar el crecimiento tumoral en el cáncer de mama, de gran importancia para la salud pública, es necesario considerar células específicas que influyen en el crecimiento tumoral. En este contexto, Wei (2019) propone el siguiente modelo basado en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

$$\frac{dT}{dt} = \left( \frac{a + cET}{1 + E + \beta_1 T^2} \right) T \left( 1 - \frac{T}{K} \right) - \frac{p_1 TN_2}{1 + \alpha_2 T + \beta_2 N} - \frac{p_6 T^2 L}{1 + \alpha_6 T^2 + \beta_6 L} \quad (3)$$

$$\frac{dN}{dt} = eC - fN - p_2 NT + \frac{p_3 NT}{1 + \alpha_3 T + \beta_3 N} \quad (4)$$

$$\frac{dL}{dt} = \left( \frac{p_4 L_N + p_5 I}{\alpha_4 + I} \right) \left( 1 - \frac{L}{K_L} \right) \frac{T}{\alpha_5 + T} - dL \quad (5)$$

$$\frac{dC}{dt} = a - \beta C \quad (6)$$

Este sistema describe la interacción entre células tumorales de la línea celular MCF-7, el estradiol, las células NK, los linfocitos T citotóxicos (CTLs) y los glóbulos blancos (WBCs). Este modelo busca proporcionar una

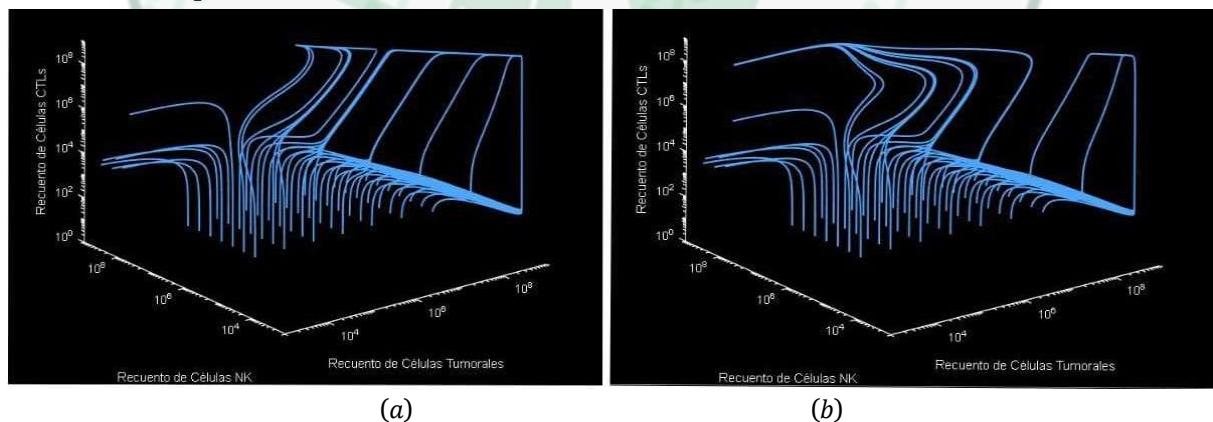
herramienta cuantitativa que permita analizar la progresión del tumor y evaluar la efectividad de la respuesta inmune en distintos escenarios clínicos.

El crecimiento del tumor se modela mediante una ecuación diferencial que describe su proliferación y la influencia de factores inmunológicos y hormonales. La ecuación para la evolución temporal del tumor  $T$  se expresa por medio de la ecuación (3). Donde  $a$  representa la tasa de crecimiento intrínseca del tumor,  $K$  , es la capacidad de carga del microambiente.

Las ecuaciones que rigen la respuesta inmune incluyen la evolución de las células NK, las CTLs y los WBCs. La ecuación para las células NK ( $N$ ) considera su producción en la médula ósea, su apoptosis natural y su interacción con el tumor; está descrita por (4). Donde  $eC$  representa la producción de células NK en función de los glóbulos blancos,  $fN$  es la tasa de muerte celular y  $p_2NT$  modela la inactivación de células NK por interacción con el tumor.

La evolución de los CTLs ( $L$ ) se modela con la ecuación (5), donde  $p_4 L_N$  describe la proliferación inducida por células NK,  $\frac{p_5 I}{\alpha_4 + I}$  representa la activación de CTLs por IL-2 y  $K_L$  es la capacidad de carga de las células T citotóxicas. Finalmente, la dinámica de los WBCs se modela con (6), con  $\alpha$  y  $\beta$  como las tasas de producción y muerte celular, respectivamente.

Para validar el modelo, Wei (2019) ajusta los parámetros utilizando datos experimentales obtenidos de estudios previos sobre la proliferación de células MCF-7 en presencia de estradiol (Nawata et al., 1981, como se citó en Wei, 2019), la lisis tumoral mediada por células NK (Caragine et al., 1998, como se citó en Wei, 2019) y el reclutamiento de células inmunes en el cáncer de mama (Gruber et al., 2013, como se citó en Wei, 2019). El modelo matemático propuesto por Wei describe la dinámica del sistema inmunológico en la detección y eliminación de tumores. En este trabajo, hemos replicado el modelo realizando modificaciones en las simulaciones numéricas, reemplazando los cálculos originales por diagramas de fase en tres dimensiones y resolviendo el sistema para diferentes condiciones iniciales.



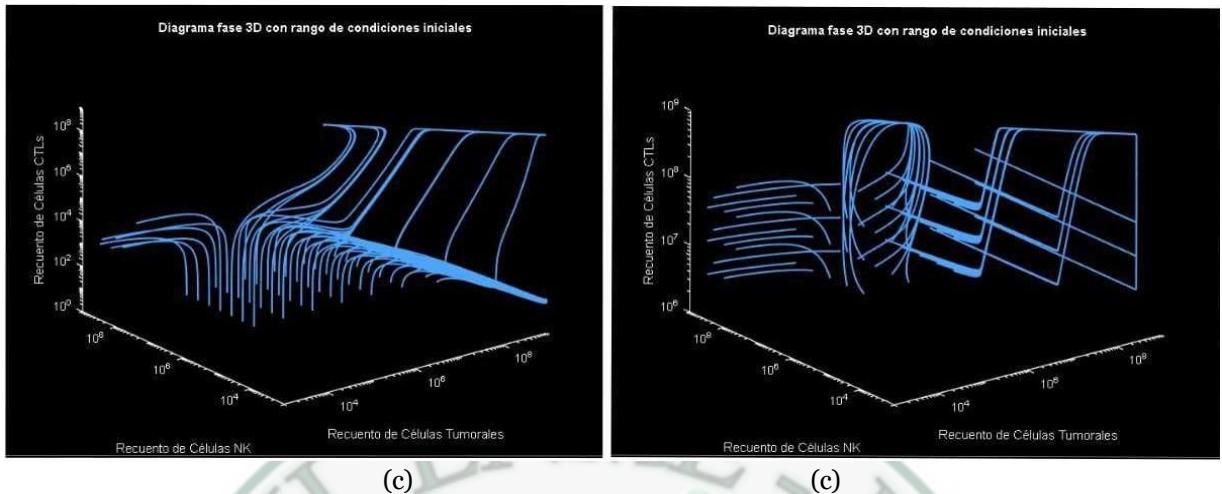


Figura 2: Diagramas de Fase en tres dimensiones para diferentes condiciones iniciales. Las trayectorias se representan por líneas azul claro.

Las simulaciones mostradas en la Figura 2 a) y Figura 2 c) muestran la evolución de un tumor en un sistema inmunológico normal y débil, respectivamente. En cualquier caso, el sistema depende de las condiciones iniciales para alcanzar un equilibrio; es decir, posee multiestabilidad, donde los equilibrios pueden corresponder a uno de tres casos: libre de tumor, tumor microscópico en estado de dormancia y tumor grande. Un sistema inmunológico funcional es capaz de eliminar tumores de hasta  $4 \times 10^6$  células, siempre que la activación de los CTLs sea suficiente.

Por otro lado, en la Figura 2 d) se explora el impacto de una población inicial de CTLs en la evolución tumoral. Se observa que, si los CTLs ya están presentes en concentraciones moderadas desde el inicio, la eliminación del tumor ocurre más rápidamente, incluso si el sistema inmunológico no está en su estado óptimo; sin embargo, se llegan a los mismos tres casos de estabilidad mencionados anteriormente.

Por último, en la Figura 2 b) se evidencia el impacto de la citotoxicidad de los CTLs dada por el parámetro  $p_6$ . Se observa que, al aumentar  $p_6$  a  $2.04 \times 10^{-4}$ , el sistema inmunológico es capaz de eliminar o inducir dormancia en tumores más grandes.

## Referencias:

- Eftimie, R., Bramson, J. L., & Earn, D. J. D. (2010). Interactions Between the Immune System and Cancer: A Brief Review of Non-spatial Mathematical Models. *Bulletin Of Mathematical Biology*, 73(1), 2-32.
- Wei, H. (2019). Mathematical modeling of tumor growth: the MCF-7 breast cancer cell line. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 16(6), 6512-6535.
- Stepanova (1980), N. Course of the immune reaction during the development of a malignant tumour, *Biophysics*, 24, 917–923.
- Schättler, H., & Ledzewicz, U. (2015). *Optimal Control for Mathematical Models of Cancer Therapies: An Application of Geometric Methods*.
- Clarke, R., Tyson, J. J., & Dixon, J. M. (2015). Endocrine resistance in breast cancer – An overview and update. *Molecular And Cellular Endocrinology*, 418, 220-234.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Estructuras dinámicas para los fenómenos de  
incremento de periodo y adición de periodo en  
mapas lineales discontinuos

JUAN VARGAS

Filiación: Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, Colombia  
e-mail: [juan.vargas@unal.edu.co](mailto:juan.vargas@unal.edu.co)

SIMEÓN CASANOVA TRUJILLO

Filiación: Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, Colombia  
e-mail: [simeon.casanova@unal.edu.co](mailto:simeon.casanova@unal.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Los sistemas dinámicos discretos definidos por funciones por partes han mostrado una rica variedad de comportamientos bifurcacionales, entre los cuales destacan fenómenos de codimensión 1 y 2. Un caso especialmente notable es el de la *bifurcación Big-Bang*, caracterizada por la intersección de infinitas curvas de bifurcación de codimensión 1, lo que da lugar a una coexistencia simultánea de órbitas periódicas de todos los periodos posibles, generando configuraciones altamente estructuradas y complejas.

En este contexto, emergen dos fenómenos dinámicos de especial interés: el incremento de periodo, donde se observa una proliferación ininterrumpida de órbitas con períodos crecientes, y la adición de periodo, en la cual la aparición de nuevas órbitas sigue un patrón jerárquico representado por las sucesiones de Farey. Este último fenómeno establece una conexión directa con estructuras tipo Cantor, que permiten describir matemáticamente la organización de los períodos en ciertos intervalos del espacio de parámetros.

En este trabajo se estudian las cuencas de atracción asociadas a estos fenómenos dentro de mapas lineales por partes, empleando métodos analíticos que permiten revelar la organización de dichas cuencas y su dependencia respecto a las variaciones

paramétricas. La simplicidad estructural de los sistemas lineales suaves a trozos ofrece un marco accesible para realizar esta caracterización y abre posibilidades para extender los resultados a casos de mayor complejidad, tanto en dimensión como en no linealidad.

Finalmente, se pone en evidencia cómo las estructuras generadas por el aumento y la adición de periodo se entrelazan con propiedades simbólicas y topológicas, aportando una base teórica sólida para el análisis de dinámicas complejas en sistemas por partes.

## Palabras claves

Adición de periodo, bifurcación Big-Bang, cuencas de atracción, mapas lineales por partes, sucesiones de Farey.

## Referencias

- [1] Avrutin, V., Schanz, M., & Osinga, H. M. (2019). Farey trees and devil's staircases in nonsmooth dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 29(05), 1930012.
- [2] Gardini, L., Avrutin, V., & Sushko, I. (2020). Border-collision bifurcations in 1D piecewise smooth maps: Theory and applications. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*, Vol. 98.
- [3] Granados, A., & Tejada, P. (2021). Symbolic dynamics and rotation numbers in discontinuous circle maps. *Nonlinear Dynamics*, 105(1), 121–142.
- [4] Singer, James (1938). A Theorem in Finite Projective Geometry and Some Applications to Number Theory, *Transactions of the American Mathematical Society*, 43, 377–385.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Método Galerkin-ondículas en la solución de EDP

JAIRO VILLEGAS G

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia

e-mail: [javille@eafit.edu.co](mailto:javille@eafit.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Definimos las ondículas partiendo de una función  $\psi$  de variable real  $t$ . Esta función se denomina *ondícula madre* si está bien localizada y oscila. (Se asemeja a una onda porque oscila, y es una ondícula porque está localizada). La condición de localización se expresa de la manera usual diciendo que la función decrece rápidamente hasta cero a medida que  $|t|$  tiende a infinito. La segunda condición sugiere que  $\psi$  vibra como una onda. Matemáticamente, requerimos que la integral de  $\psi$  sea cero y que los otros  $m$  primeros momentos de  $\psi$  también se anulen. Esto se expresa por medio de las relaciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, m-1.$$

La ondícula madre  $\psi$  genera las demás ondículas de la familia  $\psi_{a,b}$ , donde  $a > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ , mediante un cambio de escala y traslación en el tiempo. (La escala de  $\psi$  es por convención uno y se centra alrededor de cero, mientras que la escala de  $\psi_{a,b}$  es  $a > 0$  y se centra en  $b$ .) Por lo tanto, tenemos

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Grossmann y Morlet demostraron a principios de la década de 1980 que esta colección se puede utilizar como una base ortonormal cuando  $\psi$  es de valor real. Esto significa que cualquier señal de energía finita se puede representar como una combinación lineal

de ondículas  $\psi_{a,b}$  y que los coeficientes de esta combinación son, más allá del factor de normalización, los productos escalares  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{\psi}_{a,b}(t)dt$ . Estos productos escalares miden, en cierto sentido, las fluctuaciones de la señal  $f$  alrededor del punto  $b$ , en la escala dada por  $a > 0$ . Para un estudio más profundo y detallado sobre ondículas, véase por ejemplo, [6, 8, 9, 13].

El desarrollo de técnicas numéricas para la obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales se ha incrementado en las últimas décadas. Entre estas técnicas son bien conocidas los métodos de diferencias finitas y elementos finitos. Recientemente, el uso de ondículas como funciones base para la discretización de ciertas ecuaciones en derivadas parciales (EDP), parecen proporcionar una generalización de los métodos de elementos finitos con algunas características de los métodos multimalla. En particular, el método de Galerkin usando ondículas como funciones de prueba proporciona el método *Galerkin-ondículas* en la solución de EDP [1], método robusto debido a la capacidad de localización de las expansiones de ondículas lo que da lugar a operadores dispersos y a una buena estabilidad numérica de los métodos.

Los trabajos pioneros en utilizar técnicas con ondículas en la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, podemos mencionar los de Amaratunga [1], Beylkin [2, 3], Dahmen [4], Jaffard [7], Urban [9, 10], entre otros. La idea de utilizar este método se basa en las buenas propiedades de las ondículas en la construcción de algoritmos adaptativos. Un algoritmo de este tipo selecciona un conjunto minimal de aproximaciones en cada paso, de tal manera que la solución calculada sea lo suficientemente próxima a la solución exacta. Además, si queremos que la solución calculada sea suave en alguna región, sólo unos pocos coeficientes de la ondícula serán necesarios para obtener una buena aproximación de la solución en dicha región, es decir, solamente los coeficientes de bajas frecuencias cuyo soporte esté en esa región son los que se utilizan.

En esta ponencia se presenta algunos desarrollos de la investigación en *Métodos wavelet para la solución de ecuaciones diferenciales*. Se considerará el caso de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), véase por ejemplo [5], [11, 12]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}$$

como ecuación referente en la utilización del método Galerkin-ondículas, con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes. Se estudiará también estimaciones del tipo

$$\|f - P_{V_j}f\|_{L_2} \leq \lambda 2^{-jm} \|f^{(m)}\|_{L_2},$$

donde  $\lambda > 0$  es una constante,  $m$  es el número de momentos nulos para la ondícula  $\psi_{a,b}$ ,  $V_j$  es el espacio de aproximación y  $f \in C^m(\mathbb{R})$ .

## Palabras claves

Método Galerkin-ondículas, ecuación KdV, método de elementos finitos, ondícula.

## Referencias

- [1] Amaratunga, K., Williams J.R. (1997) Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems. *Archives of Computational Methods in Engineering.* 4(3), 243-285.
- [2] Beylkin, G., Keiser, J. M. (1997) On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet bases. *Journal of Computational Physics.* 132, 233-259.
- [3] Beylkin, G. (1994) On wavelet-based algorithms for solving differential equations, pp 449-466 in *Wavelets: Mathematics and Applications*, J. Benedetto, M. Frazier (eds.), CRC Press, Boca Raton, Florida.
- [4] Dahmen, W. (2001) Wavelet methods for PDEs-some recent developments, *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 128, 133-185.
- [5] Gomes, S., Cortina, E. (1997) Fourier Analysis of Petrov-Galerkin Methods Based on Biorthogonal Multiresolution Analysis, pp 119-140 in *Wavelets Theory and Harmonic Analysis in Applied Sciences*, C. E. D'Attellis, E. M. Fernández-Berdaguer (eds.), Birkhäuser, Boston.
- [6] Hernandez, E., Weiss, G. (1996) *A First Course on Wavelets.* CRC Press, Boca Raton, FL.
- [7] Jaffard, S. (1992) Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis.*, Vol. 29, No. 4, 965-986.
- [8] Resnikoff, H. L., Wells, R. O. (2002) *Wavelet Analysis.* Springer-Verlag, New York.
- [9] Urban, K. (2009) *Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations.* Oxford University Press Inc., New York.
- [10] Urban, K. (2002) *Wavelet in Numerical Simulation: problem adapted construction and applications.* (Lecture Notes in Computational Science and Engineering; Vol. 22). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [11] Villegas, J., Castaño, J., Duarte, J., Fierro, E. (2012) Wavelet-Petrov-Galerkin method for the numerical solution of the KdV equation, *Applied Mathematical Sciences.* Vol. 6, no. 69, 3411-3423.
- [12] Villegas, J., Buitrago, L., Castaño, J. (2016) Taylor-Petrov-Galerkin Method for the Numerical Solution of KdV Equation, *Applied Mathematical Sciences.* Vol. 10, no. 4, 197-204.
- [13] Walnut, D. (2002) *An Introduction to Wavelets Analysis.* Birkhäuser, Boston.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## A nonsmooth global quasi-Newton algorithm for nondifferentiable equations

HEVERT VIVAS

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia  
e-mail: [hevivas@unicauca.edu.co](mailto:hevivas@unicauca.edu.co)

CARLOS ARIAS

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia  
e-mail: [carlosarias@unicauca.edu.co](mailto:carlosarias@unicauca.edu.co)

ROSANA PÉREZ

Filiación: Universidad del Cauca , Popayán, Colombia  
e-mail: [rosana@unicauca.edu.co](mailto:rosana@unicauca.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

In this work, we consider the system of nonlinear equations:

$$F(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

where  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a nondifferentiable function. This type of system appear in numerous applications in engineering, economics, science [1–3].

To solve (1), we propose a new global nonsmooth quasi-Newton algorithm for solving nondifferential equations, whose globalization strategy uses a derivative-free linear search. Under reasonable Assumptions, we prove  $q$ -superlinear convergence of the algorithm. Finally, we present some numerical tests that shows a good performance of the algorithm proposed.

## Palabras claves

Derivative-free linear search; nondifferentiable equations;  $q$ -superlinear convergence; quasi-Newton algorithm.

## Referencias

- [1] C. A. Arias, H. J. Martínez, and R. Pérez, A global quasi-Newton algorithms for nonlinear complementarity problems, Pac. J. Optim. 13 (2017), no. 1, 1?15.
- [2] Defeng, S., Jiye, H. : Newton and Quasi-Newton Methods for a Class of Nonsmooth Equations and Related Problems. SIAM J. Optim. Tomo 7, N.<sup>o</sup> 2. May 1997.
- [3] Vivas, H. and Pérez, R. and Arias, C. A. 2023. A nonsmooth Newton method for solving the generalized complementarity problem. Numer. Algor., doi:10.1007/s11075-023-01581-2.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Las matemáticas detrás de los filtros de Instagram

**MICHAEL ALEJANDRO ZAMBRANO PRADO**

**Filiación:** Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia

**e-mail:** mazambranop@upn.edu.co

**WILLIAM JIMENEZ GOMEZ**

**Filiación:** Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., Colombia

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

### Resumen

La transformación y mejora de imágenes digitales, como las que se emplean en los filtros de aplicaciones y redes sociales tipo Instagram, se basa en principios matemáticos, particularmente del álgebra lineal. Esta ponencia presenta un recorrido por distintas técnicas de procesamiento digital de imágenes, con énfasis en la mejora de fotografías tomadas en condiciones de baja iluminación. A través del análisis de transformaciones aplicados a imágenes de la base de datos *The Dark Face*, (Yang et al., 2020). Se estudian operaciones que permiten modificar el brillo, el contraste y la visibilidad de los detalles.

El estudio se divide en dos fases. En la primera, se aplican transformaciones lineales mediante la modificación de cada píxel por algún escalar  $k$ , modelando el ajuste de luminosidad como una operación de tipo matricial. En la segunda, se exploran transformaciones no lineales: logarítmica, histogramas ajustados y corrección gamma ( $\gamma$ ) en la que se escoge un valor específico Pratt (2007), todas tratadas desde una perspectiva cuantitativa Sharma et al. (2020). Cada técnica es evaluada con herramientas estadísticas, permitiendo no solo apreciar su efecto visual, sino también analizar su fundamento matemático.

La ponencia busca así revelar la estrecha relación entre la estética digital y los modelos algebraicos, mostrando que detrás de cada filtro de imagen existe un conjunto preciso de transformaciones matemáticas que pueden ser interpretadas, modeladas y optimizadas desde el álgebra de matrices.

### Palabras clave

Transformaciones lineales, trasformaciones no lineales, tratamiento de imágenes.

## Referencias

- [1] Yang, S., Luo, P., Loy, C. C., & Tang, X. (2020). WIDER FACE: A face detection benchmark. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 43(10), 3605–3617.
- [2] Pratt, W. K. (2007). *Digital image processing: PIKS scientific inside* (4th ed.). Wiley-Interscience.
- [3] Sharma, A., Pandey, A. K., Khichi, D., & Kumar, R. (2020). Methylene diphosphonate bone scan: Scintigraphic features and histographic interpretation. *Indian Journal of Nuclear Medicine*, 35(1), 6–11

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Algunos Contextos del sistema Depredador - Presa

LUZ AMPARO IBARRA TOLE

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [libarratole@ut.edu.co](mailto:libarratole@ut.edu.co)

HÉCTOR ANDRÉS GRANADA DIAZ

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [hagranadad@ut.edu.co](mailto:hagranadad@ut.edu.co)

PABLO EMILIO CALDERÓN SAAVEDRA

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [pecalderon@ut.edu.co](mailto:pecalderon@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

El sistema Depredador – Presa es un modelo ampliamente conocido en la literatura del modelamiento matemático y es también llamado modelo de Lotka–Volterra, este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias fue propuesto de forma independiente por Alfred J. Lotka en 1925 y Vito Volterra en 1926, y describe la dinámica de dos poblaciones que interactúan una como presa y la otra como depredador.

En esta comunicación se explica la construcción del modelo básico y se presenta en: algunos modelos de investigaciones como la biología [1], algunas variantes como el hecho de que el depredador encuentra refugios [10], se usa para hacer una aproximación a los modelos bioeconómicos a partir del análisis teórico-matemático del modelo mutualista de Lotka-Volterra, con el objetivo de demostrar que las relaciones de cooperación entre dos especies son posibles [9], una investigación teóricamente la dinámica de la población depredador-presa en términos de intensidad de respuesta toxicológica (fuerza a la tasa de crecimiento de la población) a partículas microplásticas, y examinamos los efectos negativos sobre la capacidad de alimentación de la presa y el rendimiento del depredador debido a las partículas microplásticas [11], un modelado con logística, cosecha, cooperación, migración, competición, con efecto Allee aditivo, competición y estocástico de un ecosistema sencillo de presas y depredadores, mediante un sistema multiagente [2,4], en una revisión de vanguardia de los modelos recientes de depredador-presa, que incluyen características interesantes como el efecto Allee, el efecto miedo, el canibalismo y la inmigración [12], un modelo que consta de dos depredadores y una presa estructurada en etapas, que involucra el tipo de respuesta funcional Lotka-Volterra [5], un modelo con presencia de presa con retardo [3], se asocia con sistemas

multiagentes [7], cuando la explotación en los depredadores es restringida si la cantidad de presas es inferior a un valor critico [6], la tasa de consumo de respuesta o depredador funcional es un tipo Holling III [8].

## Palabras clave

Modelo Lotka-Volterra, depredador, presa, sistema dinámco.

## Referencias

- [1] Arango, Isabella, Rengifo, Juan, Gómez, Mariana (2019). El Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra en las especies de lince canadiense y liebres raqueta de nieve, <https://repository.eafit.edu.co>, 1-11 pp.
- [2] Diáz, Wilmar, Fonseca, Aldemar (2010). Análogo estocástico del modelo Lotka-Volterra, *Revista vision electrónica*, , 2, 17-33 pp.
- [3] Marin, Julio, Cavani, Mario, Vacca, Harold (2001). Propiedades cualitativas de un modelo depredador- presa con retardo, *Divulgaciones matemáticas*, 9, No.2, 123-136 pp.
- [4] Games, M, Carreño, A. (2000). Modelos matemáticos de depredador – presa en cultivos hortícolas en invernadero en el sudeste de la península Ibérica, *Bol. San. Veg. Plagas*, 26, 665-672 pp.
- [5] Escobar, Carlos, Gonzalez, José (2011). Dinámica de la bifurcación de Hop en una clase de modelos de competencia que exhiben la bifurcación Zip, *Revista ingenierías Universidad de Medellin*, vol 10, 19, 159-169 pp.
- [6] Cortés, Christian (2021). Bifurcaciones en modelo Gause depredador-presa con discontinuidad, *Revista de matemática: teoría y aplicaciones*, 28(2), 183-208 pp.
- [7] Sánchez, Claudia, Bustos, Natalia (2023). Modelo presa-depredador mediante Sistema multiagente, *Simposio Argentino de inteligencia artificial*, 51-65 pp.
- [8] Tintinago, Paulo (2015). A Dinámica de modelo depredador-presa de tipo Leslie, *Revista de investigación IngEAN*, 2, N.2, 161-173 pp.
- [9] Jaramillo, Victor y Andres, Díaz, Euclides (2013). Aproximación matemática a los modelos bioeconómicos: Análisis de caso para el modelo mutualista de Lotka-Volterra, *Revista Tendencias Universidad Antonio Nariño*, 14, No. 2, 98-119 pp.
- [10] González, Eduardo, López, Roxana, Rojas, Alejandro (2022). Uso de refugio por las presas: Su impacto en la dinámica del modelo de Lotka-Volterra, *Revista Selecciones matemáticas Universidad Nacional de Trujillo*, 9, No. 2, 287-30 pp.
- [11] Huang, G., Lin Y., RZhong, Q. (2020). El impacto de las partículas microplásticas en la dinámica poblacional de depredadores y presas: Implicación del modelo de Lotka-Volterra, <https://doi.org/10.1038/s41598-020-61414-3>
- [12] Diz, Erika, Otero, Victoria (2021). Modelos depredador-presas: Una revisión de algunos avances recientes, <https://doi.org/10.3390/math9151783>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Análisis biparamétrico de la degradación de la tasa de infección del Aedes Densovirus (AeDNV) y la tasa crecimiento natural de mosquitos Aedes Aegypti

HÉCTOR ANDRÉS GRANADA DÍAZ

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia  
[hagranada@ut.edu.co](mailto:hagranada@ut.edu.co)

MANUEL ARTURO NOVA MARTÍNEZ

Universidad Cooperativa de Colombia, Villavicencio, Colombia  
[manuel.novam@campusucc.edu.co](mailto:manuel.novam@campusucc.edu.co)

LUIS EDUARDO OLIVAR ROBAYO

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia  
[leolivar@ut.edu.co](mailto:leolivar@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

En este trabajo se presentará un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias 3-dimensional para describir la interacción dinámica de las densidades de mosquitos infectados por Aedes Densovirus (AeDNV), mosquitos sanos y la carga viral por  $km^2$ . En la formulación del modelo se contemplan parámetros de dispersión, difusión y degradación viral, tasas de crecimiento poblacional de mosquitos sanos e infectados, donde en ésta última, se considera un efecto de retroalimentación que puede ser ocasionado por resistencia viral adquirida y por la muerte por infección. Se presentará un análisis no lineal biparamétrico de la tasas de crecimiento neto de mosquitos infectados y la tasa de degradación viral, se estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio y se clasifican zonas de bifurcaciones de Hopf. Los resultados presentados podrían ser considerados por epidemiólogos y entidades de salubridad con la finalidad

de validar la posible reducción de casos de fiebre amarilla, zika, chikungunya y dengue.

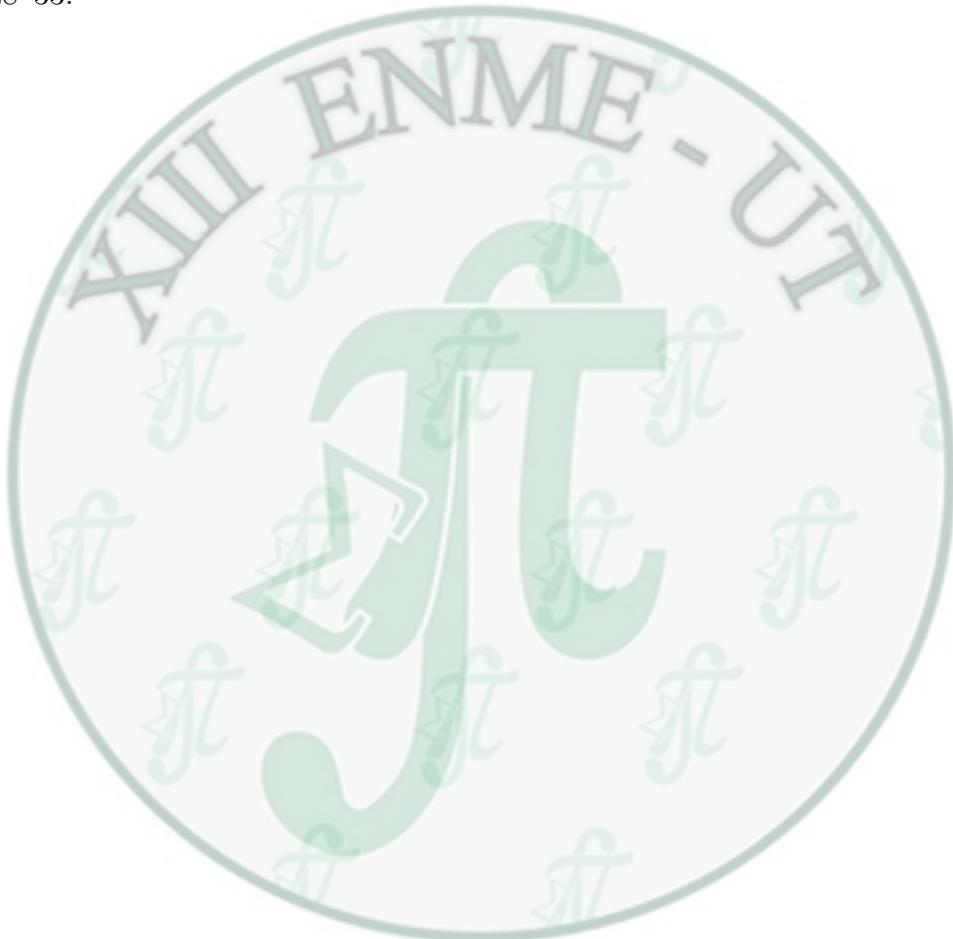
## Palabras clave

Densovirus (AeDNV), Aedes Aegypti, Estabilidad de puntos de equilibrio, Bifurcación de Hopf.

## Referencias

- [1] Alto, B. W., & Juliano, S. A. (2001). Temperature effects on the dynamics of *Aedes albopictus* (Diptera: Culicidae) populations. *Oecologia*, 129(3), 439–446.
- [2] Barreau, C., Jousset, F. X., & Bergoin, M. (1994). Pathogenicity of the *Aedes albopictus* parvovirus (AaPV) to *Aedes aegypti* larvae. *Medical and Veterinary Entomology*, 8(3), 299–303.
- [3] Barreau, C., Jousset, F. X., & Bergoin, M. (1997). *A densovirus isolated from Aedes aegypti cells displays a broad range of insecticidal activity*. *Journal of General Virology*, 78(12), 2549-2555. <https://doi.org/10.1099/0022-1317-78-12-2549>
- [4] Boublík, Y., Jousset, F. X., & Bergoin, M. (1994). Complete nucleotide sequence and genomic organization of the *Aedes albopictus* parvovirus (AaPV) pathogenic for *Aedes aegypti* larvae. *Virology Journal*, 200(2), 752–763.
- [5] Bouyer, J., Fontenille, D., Labbe, P., Toty, C., & David, J. P. (2001). Efficacy of the *Aedes* densovirus for biological control of mosquito larvae in the field. *Vector-Borne and Zoonotic Diseases*, 1(2), 125–132.
- [6] Carlson, J., Suchman, E., & Buchatsky, L. (2006). Densovirususes for control and genetic manipulation of mosquitoes. *Journal of Medical Entomology*, 43(1), 1–7.
- [7] Granada Díaz, H. A., Olivar Robayo, L. E., & Casanova Trujillo, S. (2023). Bifurcaciones horquilla y Hopf en un sistema de Lorenz extendido. Ciencia en Desarrollo, 14(2), 91-101. [https://revistas.uptc.edu.co/index.php/ciencia\\_en\\_desarrollo/article/view/15253](https://revistas.uptc.edu.co/index.php/ciencia_en_desarrollo/article/view/15253)
- [8] Kittayapong, P. (2002). Seasonal variation in natural *Wolbachia* infection and reproductive incompatibility in *Aedes albopictus* populations. *Journal of Vector Ecology*, 27(1), 33–39.
- [9] Koella, J. C., & Boëte, C. (2003). A model for the use of genetically modified mosquitoes for malaria control. *Ecology Letters*, 6(9), 807–814.
- [10] Kukan, B., Ma, D., Zhang, L., & Chao, L. (2019). *Efficacy of Aedes aegypti densovirus in controlling mosquito populations: laboratory and field studies*. *Journal of Medical Entomology*, 56(2), 345-353. <https://doi.org/10.1093/jme/tjy140>

- [11] Parvizi, P., & Shi, P. Y. (2017). *Densoviruses: potential biopesticides for mosquito control*. Current Opinion in Insect Science, 22, 35-42. <https://doi.org/10.1016/j.cois.2017.04.003>
- [12] Perera, O. P., Miller, T. A., Bonning, B. C., & McKinney, B. A. (2012). *Aedes aegypti densovirus infects Aedes aegypti mosquitoes and reduces adult emergence*. Journal of Invertebrate Pathology, 109(1), 52-59. <https://doi.org/10.1016/j.jip.2011.09.012>
- [13] Real, L. A., & Biek, R. (2007). Spatial dynamics and genetics of infectious diseases on heterogeneous landscapes. *Trends in Ecology & Evolution*, 22(1), 28–33.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Limit Cycle Bifurcations from Periodic Integral Manifolds in Non-Smooth Ordinary Differential Equations

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

Filiación: Universidad Distrital Francisco José de Caldas,

Bogotá D.C., Colombia

e-mail: [osaramirezc@udistrital.edu.co](mailto:osaramirezc@udistrital.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

This work extends the Melnikov method to analyze limit cycle bifurcations in perturbed autonomous systems of piecewise-smooth ordinary differential equations. We develop a generalized approach for higher-dimensional systems with nonlinear, disconnected switching manifolds, where the unperturbed system exhibits an integral manifold foliated by crossing periodic orbits. We illustrate our findings through several examples, highlighting the applicability and significance of our main result.

### Palabras claves

Melnikov method, Limit cycle bifurcations, Piecewise-smooth ODEs

### Referencias

- [1] K.S. Andrade, O.A. Cespedes, D.R. Cruz, and D.D. Novaes. Higher order melnikov analysis for planar piecewise linear vector fields with nonlinear switching curve. *Journal of Differential Equations*, 287:1–36, 2021.
- [2] J.L. Bastos, C.A. Buzzi, J. Llibre, and D.D. Novaes. Melnikov analysis in nonsmooth differential systems with nonlinear switching manifold. *Journal of Differential Equations*, 267(6):3748–3767, 2019.

- [3] A. Buica, J.P. Fran oise, and J. Llibre. Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 6(1):103–111, 2007.
- [4] O.A.R. Cespedes and D.D. Novaes. Limit cycles bifurcating from periodic integral manifold in non-smooth differential systems. *Journal of Differential Equations*, 365:1–25, 2023.
- [5] C. Christopher and C. Li. *Limit Cycles of Differential Equations*. Advanced Courses in Mathematics — CRM Barcelona. Birkh user-Verlag, Basel, Switzerland, 2007.
- [6] A. Gasull, J.T. L zaro, and J. Torregrosa. A new family of tchebycheff systems and its application to some abelian integrals. Preprint, 2010.
- [7] M. Han, H. Sun, and Z. Balan. Limit cycles near generalized homoclinic and double homoclinic loops in piecewise smooth systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5):1788–1803, 2007.
- [8] J. Llibre, S. Rebollo-Perdomo, and J. Torregrosa. Limit cycles bifurcating from isochronous surfaces of revolution in  $\mathbb{R}^3$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 379(1):1–13, 2011.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA POR COCIENTE DE DIFERENCIA BILATERAL Y MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS INVERSOS ELÍPTICOS

LUIS EDUARDO OLIVAR ROBAYO

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia e-mail:  
[leolivar@ut.edu.co](mailto:leolivar@ut.edu.co)

HÉCTOR ANDRÉS GRANADA Díaz

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia  
e-mail: [hagranadad@ut.edu.co](mailto:hagranadad@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Pretendemos mostrar cómo solucionar el problema inverso de encontrar el coeficiente  $a(x)$  en

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = -f(x), x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Mostraremos la forma de solucionar el problema inverso de identificación de parámetros en ecuaciones elípticas auto-adjuntas utilizando primero aproximación de derivadas numéricas por cociente de diferencias bilaterales, llegando a un sistema lineal que utilizamos para encontrar la solución del problema directo. Para solucionar el problema inverso, utilizamos minimización de un funcional que depende de dos parámetros de regularización (Tikhonov generalizado). Despues, solucionamos este mismo problema elíptico directo utilizando el método de elementos finitos para llegar al sistema y utilizamos nuevamente Tikhonov generalizado para solucionar el problema inverso.

Se compararán las soluciones encontradas por los dos métodos.

## Palabras clave

Ecuación elíptica, Problema inverso, Problema mal puesto, Regularización.

## Referencias

- [1] Olivar Robayo, L. E., & Granada Díaz, H. A. (2024). Aplicación de un método de cociente de diferencias de dos lados en la solución de un problema inverso mal puesto no lineal de una ecuación elíptica auto-adjunta. *Ciencia en Desarrollo*, 15(1), 150-154.
- [2] Kirsch, A. (2011). An introduction to the mathematical theory of inverse problems (Vol. 120). New York: Springer.
- [3] Papanikos, G., & Gousidou-Koutita, M. C. (2015). A computational study with finite element method and finite difference method for 2D elliptic partial differential equations. *Applied Mathematics*, 6(12), 2104.
- [4] Hinestrosa, D., Peralta, J., & Olivar, L. E. (2013). Regularization algorithm within two parameters for the identification of the heat conduction coefficient in the parabolic equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(7-8), 1990-1998.
- [5] Johnson, C. (2009). Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Courier Corporation.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Multiple bifurcación de Hopf en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower

PAULO CESAR TINTINAGO RUIZ

Universidad del Quindío, Armenia, Colombia

[pctintinago@uniquindio.edu.co](mailto:pctintinago@uniquindio.edu.co)

LEONARDO DUVAN RESTREPO ALAPE

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[ldrestrepa@ut.edu.co](mailto:ldrestrepa@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

En esta ponencia se muestran los resultados principales del estudio de un modelo depredador-presa de tipo Leslie–Gower, teniendo en cuenta dos importantes aspectos: se considera una respuesta funcional racional de tipo Holling IV, y se modifica la habitual capacidad de carga variable del depredador.

Se establecen condiciones en el espacio de parámetros para la existencia de puntos de equilibrio y su naturaleza; se demuestra que existe un único punto de equilibrio positivo, el cual puede ser globalmente asintóticamente estable. Además, mediante el uso del método de cantidades de Lyapunov, es posible demostrar la existencia de dos ciclos límite: el interior, inestable, y el exterior, estable; ambos rodeando dicho punto de equilibrio interior. Se demuestra la existencia de un ciclo límite no infinitesimal y se determina su estabilidad.

Se demuestra la existencia de curvas homoclínicas y heteroclínicas, se muestran algunas simulaciones que soportan los resultados matemáticos.

### Palabras claves

Ciclos límite, estabilidad, respuesta funcional, bifurcación, modelo depredador-presa.

## Referencias

- [1] Chicone C. Ordinary Differential Equations with Applications. Texts in Applied Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [2] Dumortier F, Llibre J, Artes JC. Qualitative theory of planar differential systems, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [3] Freedman HI. Deterministic Mathematical Model in Population Ecology, Marcel Dekker, 1980.
- [4] Leslie PH, Gower JC. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species, Biometrika. 1960; 47:219-234.
- [5] Murray JD. Mathematical Biology, Springer - Verlag New-York, 1989.
- [6] Turchin P. Complex population dynamics. A theoretical/empirical synthesis, Monographs in Population Biology 35 Princeton University Press, 2003

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Explorando el método de Identificación Dispersa de Dinámicas No Lineales (SINDy) en datos con diferentes niveles de ruido

MELHANY GARAY ROMÁN

Filiación: Universidad del Quindío , Armenia, Colombia

e-mail: [melhany.garayr@uqvirtual.edu.co](mailto:melhany.garayr@uqvirtual.edu.co)

CÉSAR AUGUSTO ACOSTA MINOLI

Filiación: Universidad del Quindío , Armenia, Colombia

e-mail: [cminoli@uniquindio.edu.co](mailto:cminoli@uniquindio.edu.co)

ELIZABETH OSORIO ARIAS

Filiación: Universidad del Quindío , Armenia, Colombia

e-mail: [elizabeth.osorioa@uqvirtual.edu.co](mailto:elizabeth.osorioa@uqvirtual.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Los sistemas tipo Lotka-Volterra son muy importantes en la ecología ya que permiten comprender y describir el comportamiento y las interacciones entre presas y depredadores de una población. Cuando disponemos de datos es necesario pensar entonces en técnicas que nos permitan construir un modelo que se ajuste a la descripción del fenómeno.

Por lo tanto, en este espacio se presentará una técnica conocida como Identificación Dispersa de Dinámicas No Lineales (SINDy) para reconstruir modelos presa-depredador cuando se dispone de datos, en conjunto con otras técnicas que se aplican cuando hay diferentes niveles de ruido en los datos. La aplicación del algoritmo se realizó a partir de elementos como el proceso de discretización y la perturbación de los datos, posteriormente se utilizó el método SINDy para la reconstrucción haciendo

un respectivo análisis del error.

La metodología incluyó también el paso de regresión y el paso de eliminación selectiva, que se usaron por medio de algoritmos para evaluarlo en diferentes niveles de ruido, analizando así la efectividad de esta técnica cuando los datos presentan cierto porcentaje de ruido. El propósito principal de esta investigación es justamente explorar el método SINDy bajo diferentes contextos, tal como se evidencia en el artículo [2].

Los resultados muestran como el método utilizado reconstruye el sistema con gran precisión para ciertos niveles de ruido. Presentándose como una alternativa para la exploración de sistemas dinámicos que expliquen un fenómeno cuando se dispone de datos.

## Palabras claves

Identificación dispersa de dinámicas no lineales, modelamiento inspirado en datos, ruido, sistemas presa-predador.

## Referencias

- [1] Arkes, J. (2023). Regression analysis: a practical introduction. Routledge.
- [2] Delahunt, C. B., & Kutz, J. N. (2022). A toolkit for data-driven discovery of governing equations in high-noise regimes. IEEE Access, 10, 31210-31234.
- [3] Draper, N. R., & Smith, H. (1998). Applied regression analysis (Vol. 326). John Wiley & Sons.
- [4] J Nathan Kutz, (2013). Methods for Complex Systems & Big Data, En Data-Driven Modeling & Scientific Computation
- [5] Mangan, N. M., Brunton, S. L., Proctor, J. L., & Kutz, J. N. (2016). Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics. IEEE Transactions on Molecular, Biological, and Multi-Scale Communications, 2(1), 52-63.
- [6] Montgomery, D. C. (2002). Introducción al análisis de regresión lineal.

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**COMUNICACIONES  
ESTADÍSTICA**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Analysis of mortality curves using  
function-on-partially functional regression models  
for proportional data

JULIÁN ALFONSO ACUÑA COLLAZOS

Filiación: Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia

e-mail: [julian.acuna@unimilitar.edu.co](mailto:julian.acuna@unimilitar.edu.co)

YURI TATIANA OSPINA USAQUÉN

Filiación: Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia

e-mail: [est.yuri.ospina@unimilitar.edu.co](mailto:est.yuri.ospina@unimilitar.edu.co)

MARCELO C. MEDEIROS

Filiación: The University of Illinois, Urbana-Champaign , USA

e-mail: [marcelom@illinois.edu](mailto:marcelom@illinois.edu)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

In this work, functional regression models for proportion data curves are proposed. The framework of the proposed models consists of a functional response variable and functional and scalar covariates. The estimation process is based-on two step method. First, a proportion regression model is fitted separately for each point "t" along the functional response variable with the functional and scalar covariates using appropriate link functions for the proportion mean. Proportional distributions such as Beta, Generalized Beta, Logit-Normal and Logit-TF distributions are employed to model the proportional data curves at each time "t". At this stage we use a penalized likelihood method via group penalties to estimate and select important covariates. Secondly, the resulting estimated coefficients are smoothed using B-splines basis functions to obtain the estimated functional coefficients. Model selection criteria

are calculated to evaluate the performance of proposed functional proportion models. Real data analysis is illustrated using Covid-19 mortality curves as functional response and vaccination and containment rates per day and socio-demographic for each municipality in Brazil are used as functional and scalar covariates respectively. The final model is used to predict mortality mean curves with relevant functional and scalar covariates for a given location so that it can be used as tool for the formulation of public health strategies to mitigate cases of deaths from infectious diseases.

## Palabras claves

B-splines basis functions, functional regression model, functional principal components analysis, group penalties, proportion data curves.

## Referencias

- [1] Centofanti, F., Lepore, A., Menafoglio, A., Palumbo, B., & Vantini, S. (2023). Adaptive smoothing spline estimator for the function-on-function linear regression model. Computational Statistics, 38(1), 191-216.
- [2] Chen, Y., Goldsmith, J., & Ogden, R. T. (2016). Variable selection in function?on?scalar regression. Stat, 5(1), 88-101.
- [3] Collazos, J. A., Dias, R., & Medeiros, M. C. (2023). Modeling the evolution of deaths from infectious diseases with functional data models: The case of COVID?19 in Brazil. Statistics in medicine, 42(7), 993-1012.
- [4] Fan, J., & Zhang, J. T. (2000). Two-step estimation of functional linear models with applications to longitudinal data. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 62(2), 303-322.
- [5] Ferrari, S., & Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. Journal of applied statistics, 31(7), 799-815.
- [6] Gertheiss, J., Maity, A., & Staicu, A. M. (2013). Variable selection in generalized functional linear models. Stat, 2(1), 86-101.
- [7] Rigby, R. A., Stasinopoulos, M. D., Heller, G. Z., & De Bastiani, F. (2019). Distributions for modeling location, scale, and shape: Using GAMLSS in R. Chapman and Hall/CRC.
- [8] Wang, H., & Leng, C. (2008). A note on adaptive group lasso. Computational statistics & data analysis, 52(12), 5277-5286.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**Entre sonidos y datos: explorando comportamientos de escucha musical con ciencia de datos**

**JOHAN SANTIAGO CÁRDENAS ROMÁN**

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

e-mail: [jscardenasr@upn.edu.co](mailto:jscardenasr@upn.edu.co)

**CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA**

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

e-mail: [cgrendonm@upn.edu.co](mailto:cgrendonm@upn.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Introducción

Este documento sintetiza los resultados de un análisis sobre hábitos de escucha musical con base en datos obtenidos a través de la aplicación Spotify<sup>1</sup>. El propósito central fue aplicar herramientas de ciencia de datos que, a través del análisis de datos, permitan establecer algunas conclusiones sobre los patrones de escucha musical a lo largo de ciertos lapsos. Para ello, se emplean técnicas de limpieza de datos, visualización, análisis descriptivo y el análisis de correspondencias múltiples (ACM en adelante). A través de este ejercicio, no solo se busca ejemplificar el uso de herramientas de ciencia de datos (CD en adelante) con datos sencillos, sino también reflexionar sobre la utilidad pedagógica que puede tener esta disciplina cuando se conecta con experiencias cotidianas.

El trabajo se organiza en torno a distintas fases metodológicas que siguen un ciclo usual de trabajo en CD (Lee y Deaney, 2021). En un primer momento se establecieron los propósitos del estudio a realizar. Enseguida, se realizó la importación y limpieza de los datos, que implicó, por ejemplo, la revisión de valores ausentes o la construcción de nuevas variables a partir de las existentes. Finalmente, se llevó a cabo un análisis descriptivo tanto univariado, sobre cada variable considerada; como multivariado, a través de un ACM.

---

<sup>1</sup> Aplicación para la reproducción de música vía *streaming*.

Tras los análisis efectuados, los resultados obtenidos se presentan mediante gráficos y mapas factoriales. Posteriormente, se presentan las conclusiones derivadas de los resultados en relación con los hábitos musicales identificados a partir de los datos analizados. Además, se reflexiona acerca de la potencial utilidad pedagógica de este tipo de experiencias.

### **Marco conceptual**

En esta sección se describen los objetos y conceptos matemáticos que sustentan las técnicas empleadas en el análisis de datos llevado a cabo. Como se mencionó en la introducción, dicho análisis tuvo dos etapas, una univariada y otra multivariada. Para el caso del análisis sobre las variables de forma individual, se emplearon asuntos elementales de representaciones gráficas, así como medidas de tendencia central y de dispersión. En atención a ello, no se considera necesario delinear un marco conceptual alrededor de estos asuntos; en cambio, se describe enseguida el análisis de correspondencias múltiples, la cual fue la técnica empleada en la etapa multivariada del trabajo hecho y que no es tan usual en la enseñanza estadística.

#### ***Análisis de correspondencias múltiples***

El ACM es una técnica estadística multivariada de carácter exploratorio destinada al estudio de variables categóricas. Su lógica consiste en transformar la información cualitativa en una representación geométrica que facilite la identificación de relaciones y patrones. El análisis inicia con el establecimiento de la tabla disyuntiva completa de los datos; es decir, aquella tabla que recoge las  $s$  particiones definidas por las variables cualitativas, dados  $n$  individuos y  $p$  categorías. En general, cada elemento de esta tabla se define como:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } i \text{ asume la categoría } j \\ 0 & \text{si no la asume} \end{cases}$$

A partir de la tabla disyuntiva completa se construye entonces la tabla de Burt, que consiste en una matriz cuadrada que sintetiza todas las asociaciones posibles entre variables cualitativas incluidas en el análisis, idea que matemáticamente se expresa como  $B = Z'Z$ , siendo  $B$  la tabla de Burt y  $Z$  la tabla disyuntiva completa. La tabla de Burt contiene en su diagonal principal las frecuencias de cada modalidad y fuera de la diagonal las coocurrencias entre modalidades (Greenacre, 2017). De esta manera, la tabla de Burt constituye la base numérica sobre la que se aplica el ACM, pues concentra la información numérica necesaria para identificar similitudes y diferencias entre categorías (Parra, 1996).

En la tabla disyuntiva completa se define el centro de gravedad de la nube de puntos como

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} z_{ij} = \frac{n_j}{ns}$$

Así mismo, se puede establecer la distancia entre dos puntos  $i$  y  $l$  como

$$d^2(i, l) = ns \sum_{j=1}^p \frac{1}{n_j} \left( \frac{1}{s} (z_{ij} - z_{lj}) \right)^2$$

Esta métrica pondera más las categorías poco frecuentes (mayor información) y menos las muy frecuentes.

La importancia del ACM radica en su capacidad para permitir la visualización de información compleja de forma simplificada y detectar agrupamientos significativos. Investigaciones recientes han demostrado su aplicabilidad en la economía, la educación y la sociología (Nenadic y Greenacre, 2007; Puebla, 2023; Bravo, 2024).

Por otra parte, la descomposición en valores singulares (SVD) constituye el paso algebraico central del ACM. Una vez construida la tabla de Burt «que sintetiza todas las asociaciones entre modalidades de las variables», surge la necesidad de proyectar esa información en un espacio de menor dimensión que sea interpretable. La SVD cumple justamente esa función: factoriza una matriz  $X$ , con entradas en los números reales, en el producto de tres matrices:

$$X = UDV'$$

Siendo  $U$  y  $V$  dos matrices ortogonales y  $D$  una matriz diagonal cuyos elementos corresponden a los valores singulares de  $X$ . Estos valores singulares se relacionan directamente con la varianza explicada por cada dimensión. De este modo, la aplicación de la SVD a la tabla de Burt permite identificar ejes factoriales que concentran la mayor parte de la inercia y que sirven como nuevas coordenadas. Es gracias a esta reducción que se pueden proyectar tanto a individuos como a categorías en un espacio de menor dimensión, facilitando su interpretación gráfica (Greenacre, 2017; Husson, et al. 2010). De esta manera, la SVD no solo permite reducir la dimensionalidad de la tabla de Burt, sino también construir un espacio factorial en el que las modalidades y los individuos quedan representados de forma conjunta. Esta representación hace posible observar proximidades, distancias y asociaciones que no serían evidentes en las tablas originales.

Como se señaló, uno de los propósitos del ACM es la representación, a través de planos factoriales, de las asociaciones entre categorías. Para ello, es importante determinar qué tanto contribuyen a los ejes factoriales cada uno de los individuos analizados. Así, para determinar la representatividad o contribución de cada individuo se cuenta con al menos dos herramientas:

- Contribución al eje  $k$  que se define como  $(masa_i)F_{ik}^2/\alpha k$ .

- Coseno cuadrado  $\cos^2_{ik}$ : proporción de la inercia del punto explicada por el eje  $k$  (calidad de representación).

Donde  $masa_i$ , corresponde a la masa o peso relativo de la modalidad (su frecuencia en la tabla),  $F_{ik}^2$  es la coordenada factorial de la modalidad sobre el eje  $k$  y  $\alpha_k$  es el valor propio asociado al eje, que mide la inercia explicada por dicho componente. Esta formulación permite identificar que modalidades son las que más influyen en la construcción de cada dimensión factorial (Greenacre, 2017). Estos insumos permiten identificar cuáles modalidades caracterizan un eje y cuáles están bien representadas en el plano.

### Aspectos metodológicos

En primer lugar, se definieron los objetivos del estudio: identificar patrones de consumo musical, analizar la distribución temporal de la escucha musical y establecer patrones entre géneros y comportamientos de reproducción a través de un enfoque multivariado. Posteriormente, se llevó a cabo el preprocesamiento de los datos a partir de importar tres archivos en formato JSON proporcionados por Spotify al software RStudio. Estos archivos contienen más de veinte mil registros de reproducciones con información detallada sobre artista, canción, duración y fecha/hora (Figura 1).

```
{
  "endTime" : "2024-05-18 17:52",
  "artistName" : "Paulo Londra",
  "trackName" : "Romeo y Julieta",
  "msPlayed" : 170000
},
{
  "endTime" : "2024-05-18 17:56",
  "artistName" : "Aleks Syntek",
  "trackName" : "Duele El Amor",
  "msPlayed" : 275373
},
{
  "endTime" : "2024-05-18 20:37",
  "artistName" : "Travis Scott",
  "trackName" : "Goosebumps - Remix",
  "msPlayed" : 89256
},
{
  "endTime" : "2024-05-18 20:37",
  "artistName" : "Kina",
  "trackName" : "Nobody Cares",
  "msPlayed" : 5250
},
```

Figura 1. Información de archivos importados.

Enseguida, la etapa de limpieza y transformación de datos implicó un trabajo cuidadoso sobre variables como *artistName* y *trackName*, que aluden, respectivamente, a los nombres de los artistas y de las canciones. Estas dos variables se procesaron para unificar nombres y evitar duplicados (*i. e.*, artistas que siendo uno solo aparecen con al menos dos nombres diferentes dependiendo de la canción). Por su parte, la variable *endTime*, que se refiere a fecha y hora en que se reprodujo cada canción, se transformó utilizando la librería lubridate de R, que permitió extraer componentes temporales como el mes, la semana, el día de la semana y la hora del día en que se escuchó cada canción.

Esta segmentación facilitó el análisis no solo de aquello que se escuchó, sino también del cuándo se escuchó.

Un aspecto metodológico importante fue la reducción del ruido en los datos para hacer más legible la información. Dado que la base contenía miles de artistas distintos, se decidió agrupar aquellos con una frecuencia relativa menor al 0.25% bajo la categoría de «Otros». Esta estrategia no solo simplifica los análisis y gráficos posteriores, sino que además permite concentrar la atención en los principales actores del estudio: los artistas que efectivamente marcan una diferencia en los hábitos musicales. Esta decisión metodológica responde a un principio básico de la visualización de datos: evitar la sobrecarga cognitiva y permitir que el observador pueda extraer conclusiones claras (Tufte, 2001; Cleveland, 1993; Few, 2012).

Posteriormente, se realizó un análisis descriptivo univariado de las variables seleccionadas, a saber: género musical (a partir de *artistName* y *trackName*), duración de las canciones (derivada de *msPlayed*), frecuencia de repetición (número de veces que un mismo *trackName* aparece en la base) y temporalidad de escucha en tres niveles: hora del día, día de la semana y mes (todas obtenidas a partir de la variable *endTime*). Este análisis se apoyó en la interpretación de las medidas de tendencia central y dispersión de las variables, así como de representaciones gráficas tales como histogramas y diagramas de barras para explorar la distribución de géneros y artistas.

Luego del análisis por variables de forma individual, se implementó un ACM a través de la librería FactoMineR y factoextra de R, para identificar y describir algunas relaciones entre las variables seleccionadas. Para este procedimiento se retomaron las variables cualitativas previamente construidas: género musical (con categorías como reguetón, pop, hip-hop, R&B, corridos tumbados, electrónica/trap y otros), duración categorizada (corta, media, larga) y nivel de repetición de las canciones (bajo, medio, alto). En el caso de la duración, *msPlayed* (milisegundos reproducidos) fue transformada en tres rangos definidos con base en percentiles de la distribución:

- corta (inferior al percentil 33),
- media (entre los percentiles 33 y 66),
- larga (superior al percentil 66).

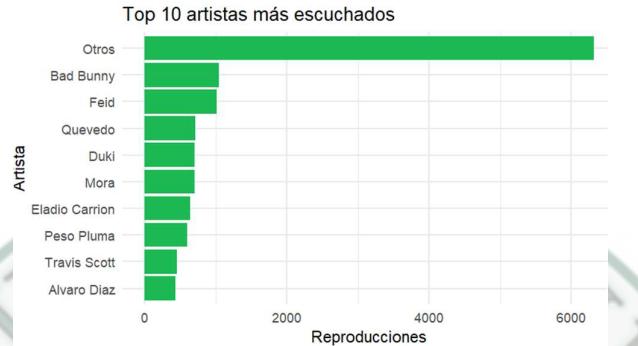
De manera análoga, el nivel de repetición se estableció calculando la frecuencia de aparición de cada *trackName* en el historial, clasificándola en tres niveles:

- bajo (hasta el percentil 33 de la distribución de frecuencias),
- medio (entre los percentiles 33 y 66),
- alto (superior al percentil 66).

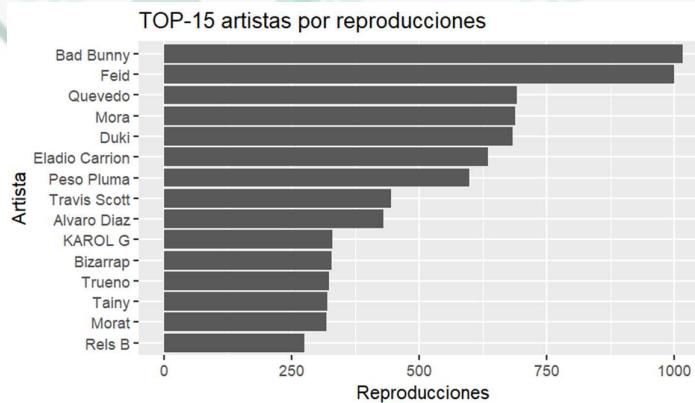
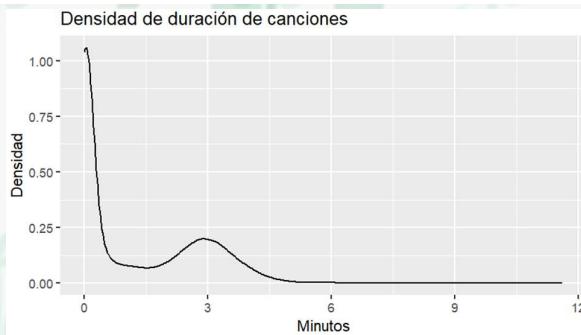
Este criterio de cortes por percentiles permitió una partición balanceada y objetiva de los datos, evitando decisiones arbitrarias en la construcción de categorías. Enseguida se presentan los resultados de los análisis realizados a los datos.

## Resultados

El análisis descriptivo permitió caracterizar los hábitos de escucha musical a partir de 20434 reproducciones registradas en el periodo de estudio. Los primeros cálculos univariados mostraron que la duración promedio de las canciones fue de aproximadamente 3,1 minutos, con una mediana cercana a los 3 minutos, y una desviación estándar de 1,5 minutos. En cuanto a los artistas, se observó una fuerte concentración: el top 10 de artistas acumuló más del 50% de las reproducciones, mientras que el resto de los miles de intérpretes quedó clasificado como “Otros”.

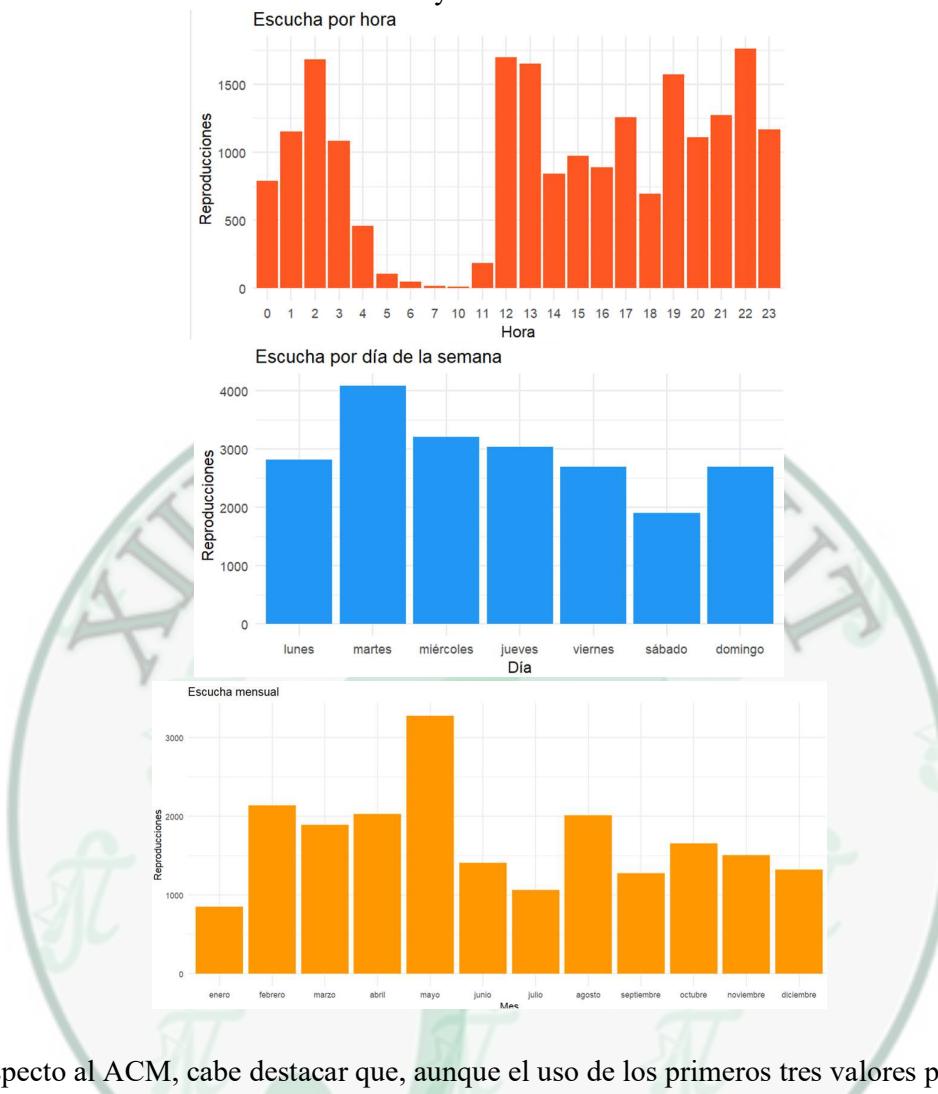


```
> cat("Reproducciones:", n_total, "\n")
Reproducciones: 19569
> cat("Duración (min) - media:", round(mean_min,3),
+     "| mediana:", round(median_min,3),
+     "| sd:", round(sd_min,3), "\n")
Duración (min) - media: 1.257 | mediana: 0.262 | sd: 1.484
```



Desde el punto de vista temporal, los resultados evidencian que la música fue escuchada de manera constante durante el día, con ligeros picos en horas de la noche y en fines de

semana. La variable «mes» mostró cierta estabilidad, con mayor volumen de reproducciones en vacaciones de mitad y fin de año.



Respecto al ACM, cabe destacar que, aunque el uso de los primeros tres valores propios recoge el 45% de la inercia total; por efectos de la interpretación de la representación gráfica se decide solamente utilizar los primeros dos, a pesar de que recogen tan solo un 31% de la inercia total (Figura 2). Es importante señalar esta decisión porque, desde luego, hay alrededor de un 69% de información que no se va a ver representada y, por tanto, es posible que algunas relaciones entre categorías o individuos no se identifiquen a través del plano. Así mismo, podría existir una interpretación incorrecta sobre distancias de determinados puntos que podrían parecer cercanos en el plano seleccionado.

	eigenvalue	percentage of variance	cumulative percentage of variance	percentage of variance
dim 1	0.3861242	16.54818	16.54818	
dim 2	0.3407362	14.60298	31.15116	
dim 3	0.3365470	14.42344	45.57460	
dim 4	0.3322161	14.23783	59.81244	
dim 5	0.3313853	14.20223	74.01466	
dim 6	0.3262631	13.98271	87.99737	
dim 7	0.2800614	12.00263	100.00000	

Figura 2. Valores propios obtenidos en el ACM y varianza total capturada.

Por su parte, el plano factorial (Figura 3) permite reconocer que las franjas horarias en que se escucha música determinan la inercia capturada por uno de los ejes del plano. Así mismo, las canciones de duración larga permiten explicar el comportamiento de la inercia recogida en el plano. Desde luego, estos análisis preliminares deben considerar, como se mencionó previamente, que la inercia total capturada por el plano es muy baja (31%), por lo cual posiblemente algunas relaciones o patrones queden subestimados.

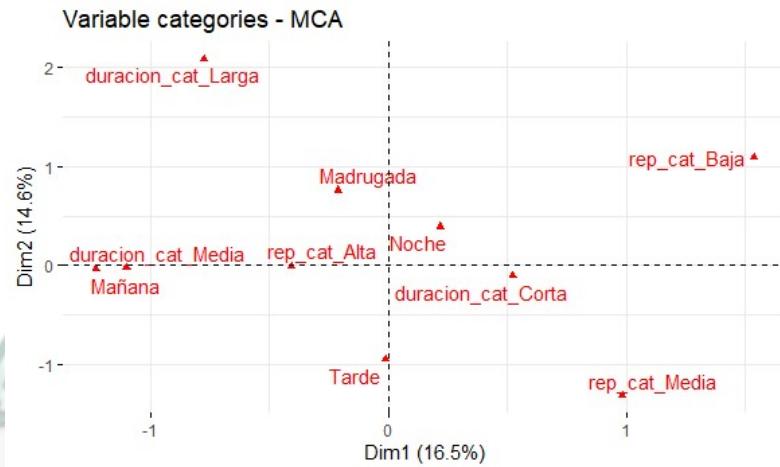


Figura 3. Plano factorial obtenido con el ACM

Finalmente, las medidas de contribución y calidad de representación confirmaron que los géneros principales son los que más estructuran los ejes, mientras que categorías poco frecuentes se proyectaron de manera periférica en los planos factoriales. En conjunto, los dos primeros ejes factoriales explicaron una proporción sustancial de la inercia, suficiente para una interpretación visual clara de los patrones de consumo.

## Conclusiones

Como es de esperar, a través de este estudio se evidenció que los hábitos musicales estudiados no son aleatorios, sino que siguen patrones estables de preferencia, principalmente hacia artistas de reguetón, pop y hip-hop, que dominan el panorama de escucha. Asimismo, desde un punto de vista de temporalidad, el análisis sugiere que la música cumple un rol de acompañamiento cotidiano para la persona, con patrones diferenciados en días y meses específicos.

En consonancia con lo anterior, el análisis de datos cotidianos a través de herramientas de CD permitió reflexionar críticamente sobre los hábitos musicales de una persona y cuestionar la veracidad de los resúmenes automáticos que genera Spotify, contrastándolos con un análisis estadístico riguroso (Gálvez, 2025).

En relación con algunas de las decisiones metodológicas, la reducción de ruido mediante la agrupación de artistas poco frecuentes en “Otros” fue clave para garantizar la legibilidad de los resultados y evitar la sobrecarga cognitiva. Esto pone sobre la mesa

un asunto relevante y es que en la enseñanza de la estadística (en los distintos niveles escolares) en ocasiones no se da la suficiente atención a las fases correspondientes a la organización, limpieza y tratamiento de los datos previo a la implementación de técnicas estadísticas.

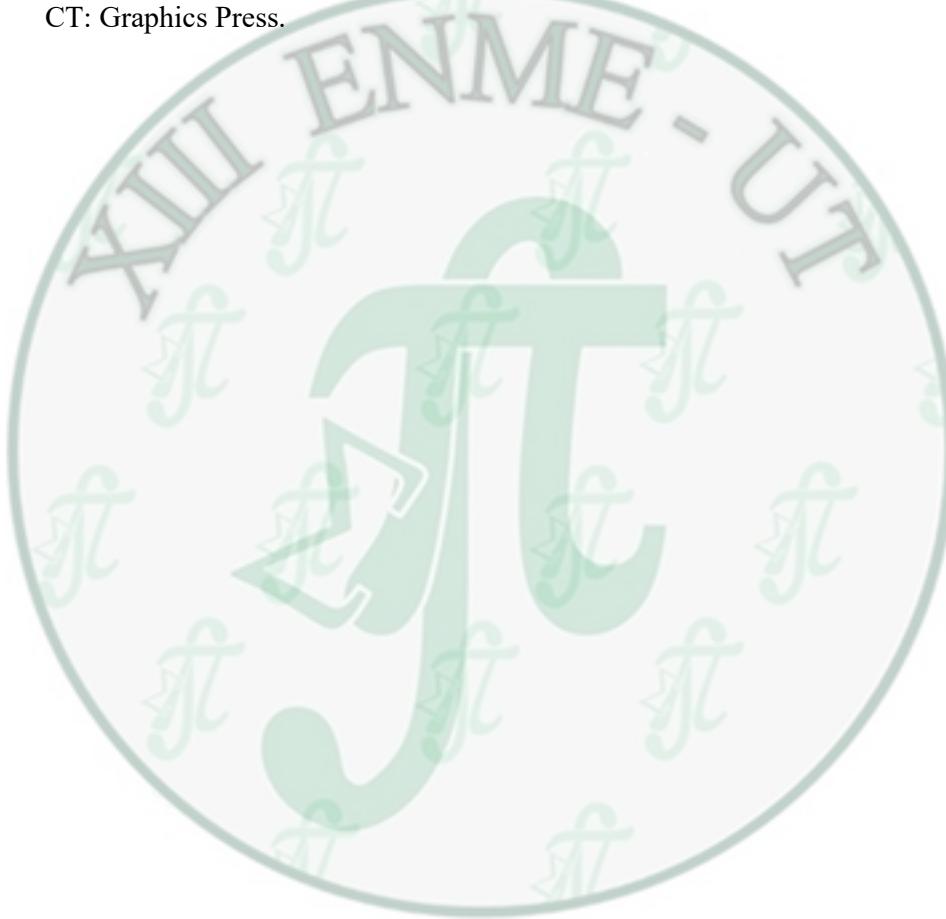
Finalmente, el estudio mostró que el ACM no se limita a ser una técnica de estadística multivariada aplicada a datos cualitativos, sino que, integrado dentro de un ciclo más amplio de CD, permite descubrir estructuras latentes y patrones de comportamiento en los hábitos de escucha musical. En este trabajo no solo se aplicó un método analítico, sino que se recorrieron todas las fases propias de la disciplina: desde la recolección de datos en bruto (archivos JSON de Spotify), su limpieza y transformación, hasta el análisis, la interpretación y la comunicación de resultados.

De esta manera, se evidencia que la CD aporta un valor añadido frente a la estadística convencional, al articular técnicas computacionales, matemáticas y de visualización con problemas reales y cotidianos. En este caso, el análisis de hábitos musicales no solo generó autoconocimiento, sino que también se constituyó en un recurso pedagógico innovador. La estadística, integrada en el marco de la CD, se convierte en una herramienta clave para comprender y problematizar la vida digital contemporánea.

## Referencias

- Bravo, K. (2024). Fundamentos y aplicaciones del Análisis de Correspondencia Múltiple: un estudio y caracterización de las condiciones de vida de la Isla de San Andrés [Trabajo de grado de maestría]. Universidad Nacional de Colombia.
- Cleveland, W. S. (1993). *Visualizing data*. Summit, NJ: Hobart Press.
- Few, S. (2012). *Show me the numbers: Designing tables and graphs to enlighten* (2nd ed.). Burlingame, CA: Analytics Press.
- Galvez [@galvez\_\_\_.] (2025, junio 1). Vengo a demostrar que Spotify Wrapped mintió. Primero que nada, les dejo cómo salió mi wrapped: [Tuit]. *X (antes Twitter)*. [https://x.com/galvez\\_\\_\\_/status/1864521811221790985?s=48](https://x.com/galvez___/status/1864521811221790985?s=48)
- Greenacre, M. (2017). *Correspondence Analysis in Practice*. Chapman & Hall/CRC.
- Husson, F., Lê, S., y Pagès, J. (2010). Exploratory Multivariate Analysis by Example Using R. Chapman & Hall/CRC.
- Lee, V. R., & Delaney, V. (2021). Identifying the content, lesson structure, and data use within pre-collegiate data science curricula. *Journal of Science Education and Technology*, 30(1), 92–108. <https://doi.org/10.1007/s10956-020-09873-2>

- Nenadic, O., y Greenacre, M. (2007). Correspondence Analysis in R, with Two- and Three-dimensional Graphics: The ca Package. *Journal of Statistical Software*, 20(3), 1–13.
- Parra, J. E. (1996). Modelo de análisis de correspondencias múltiples. *Revista de Ciencias Sociales, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*, 2(2), 183-196.
- Puebla, A. (2023). Análisis de correspondencia múltiple entre el tamaño de las empresas y su participación económica en el Estado de México. *Economía & Negocios*, 5(1).
- Tufte, E. R. (2001). *The visual display of quantitative information* (2nd ed.). Cheshire, CT: Graphics Press.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Aplicación de órdenes estocásticos a la teoría de confiabilidad

FERNEY ANTURI VARGAS

Universidad Amazonia, Florencia, Colombia

e-mail: [f.antury@udla.edu.co](mailto:f.antury@udla.edu.co)

LUIS ALBERTO OVIEDO P.

Universidad de la Amazonia, Florencia, Colombia

e-mail: [l.oviedo@udla.edu.co](mailto:l.oviedo@udla.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

La redundancia activa de componentes es una de las vías para aumentar la confiabilidad de los sistemas, véase [?, ?]. El estudio de órdenes estocásticos facilita la comparación de los tiempos de vida de diversos sistemas que aparecen en ingeniería [?]. La tecnología actual permite que los ingenieros diseñen muchos sistemas complicados cuya operación y seguridad depende de la confiabilidad de los diversos componentes que conforman tales sistemas, véase por ejemplo [?, ?, ?]. Por ejemplo, en un automóvil, hay una gran cantidad de piezas funcionales, éstas pueden dividirse en subsistemas, y cada subsistema tiene una confiabilidad asociada. Los posibles subsistemas son el motor, la transmisión, sistema de escape, la carrocería, el carburador o inyectores, el sistema de frenos, etc. Se puede abstraer un modelo matemático del sistema del automóvil y utilizar la teoría de probabilidad para predecir su confiabilidad.

Podemos definir la *confiabilidad* (ver por ejemplo [?, ?, ?, ?]) de un componente o sistema en el tiempo  $t \geq 0$ , como  $P(T > t)$ , donde  $T$  es una variable aleatoria que representa la duración del componente. Esta definición simplemente dice que la confiabilidad de un componente es igual a la probabilidad de que el componente no falle durante el intervalo  $[0, t]$  (o, equivalentemente, la confiabilidad es igual a la probabilidad

de que el componente siga funcionando en el momento  $t$ ). Si  $R(t)$  representa la confiabilidad en el tiempo  $t$  y  $f$  es la función de densidad de  $T$ , entonces

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(s)ds = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t),$$

donde  $F$  es la función de distribución acumulada. Además de la función de confiabilidad  $R$ , otra función que desempeña un papel importante para describir las partes que fallan de un componente, es la *tasa de fallo*  $Z$  (también se llama *función de riesgo*) asociada con la variable aleatoria  $T$  está dada por

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)},$$

definida para  $F(t) < 1$ . Se puede interpretar la tasa de fallo  $Z(t)$  como la cantidad que cuantifica la tasa de cambio con el tiempo de la probabilidad condicional de que el componente dure una  $\Delta t$  adicional dado que ha durado el tiempo  $t$ .

En el trabajo se consideran sistemas serie con reservas activas y se investigan condiciones suficientes para la optimización de estos sistemas [?, ?, ?]. Un sistema en serie funciona si y sólo si todos sus componentes funcionan. Por lo tanto, su función estructural está dada por

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i,$$

donde para indicar si la  $i$ -ésima componente está funcionando o no, se define la variable indicadora  $x_i$  por

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si la } i\text{-ésima componente funciona} \\ 0, & \text{si la } i\text{-ésima componente falla.} \end{cases}$$

Por otro lado, un sistema paralelo de  $n$  componentes se define como un sistema que falla si todos los componentes fallan, o alternativamente, como un sistema que funciona satisfactoriamente si al menos uno de los  $n$  componentes funciona satisfactoriamente (en donde todos los  $n$  componentes operan al mismo tiempo). Esta propiedad de los sistemas en paralelos a menudo se denomina *redundancia*, es decir, existen componentes alternativos, dentro del sistema, para ayudar al sistema a funcionar exitosamente en caso de falla de uno o más componentes. De esta manera se deduce que una señal en un extremo, digamos el izquierdo, puede llegar con éxito al otro extremo, el derecho, siempre que al menos una componente esté funcionando. La función estructural para un sistema en paralelo está dada por

$$\phi(\mathbf{x}) = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Esta ecuación nuevamente se cumple porque cada  $x_i$  toma el valor 1 o 0. La función estructural toma el valor 1 si al menos uno de los  $x_i$  es igual a 1 o, equivalentemente, si el mayor de las  $x_i$  es igual a 1.

Finalmente, considere un sistema en serie que consta de  $n$  componentes y supongamos que siempre que un componente (y por lo tanto el sistema) falla, comienza la *reparación* de ese componente y cada uno de los otros componentes entra en un estado de animación suspendida [?]. Es decir, después de que se repara el componente averiado, los otros componentes reanudan su funcionamiento exactamente en la misma condición en que se encontraban cuando se produjo el fallo. Si dos o más componentes fallan simultáneamente, uno de ellos se elige arbitrariamente como el componente que ha fallado y comienza la reparación de ese componente; los otros que fallaron al mismo tiempo se consideran en un estado de animación suspendida, y dejarán de funcionar instantáneamente cuando se complete la reparación.

## Palabras claves

Confiabilidad, función estructural, tasa de fallo, orden estocástico, orden probabilístico, ubicación óptima de un reserva activa.

## Referencias

- [1] Barlow, R. E., and Proschan, F. *Mathematical Theory of Reliability*, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), Philadelphia, 1996.
- [2] Barlow, R. E., and Proschan, F. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Reinhart & Winston, New York, 1975.
- [3] Blischke, W. R., Murthy, P. *Case Studies in Reliability and Maintenance*, Wiley, Hoboken, N. J , 2003.
- [4] Blischke, W. R., Murthy, P. *Reliability: Modeling, Prediction, and Optimization*, Wiley, New York, 2000.
- [5] Gnedenko, B. V., and Ushakov, I. *Probabilistic Reliability Engineering*. John Wiley & Sons, Inc. (1995).
- [6] Gnedenko, B. V., Belyayev, Y. K., and Solov'yev, A. D. *Mathematical Methods of Reliability Theory*, Academic Press, New York, 1969.
- [7] Hillier, F. S., Lieberman, G. J. *Introduction to Operations Research*. Tenth Edition. McGraw-Hill Education, New York, 2015.
- [8] Meyer, P. L. *Introductory Probability and Statistical Applications*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1970.
- [9] Müller, A., and Stoyan, D. *Comparison methods for stochastic models and risks*. John Wiley & Sons, New York, 2002.

- [10] O'Connor, P. D. T., and Kleyner, A. *Practical Reliability Engineering*, 5th ed., Wiley, Hoboken, N J, 2012.
- [11] Rausand, M., and Hoyland, A. *System Reliability Theory: Models and Statistical Methods and Applications*, 2nd ed. Wiley, New York, 2004.
- [12] Romera, R., Valdés, J. E., Zequeira, R. I. Active-Redundancy Allocation in Systems. *IEEE Transactions on Reliability*. 2003.
- [13] Ross, S. M. *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Fourth Edition. Elsevier Academic Press, San Diego, California. 2009.
- [14] Ross, S. M. *Introduction to Probability Models*, 10th ed. Academic Press, Orlando, FL, 2010.
- [15] Valdés, J. E., Zequeira, R. I. On the optimal allocation of an active redundancy in a two-component series system. *Statistics and Probability Letters*, 63, July, 235-332. 2003.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Riesgo y Resiliencia Fiscal del Cauca: El papel de los cultivos ilícitos en la economía regional

Mauren Dayanna López Salazar  
Wilmer Alexander Arevalo Estrada

Filiación: Universidad del Cauca, Popayán, Colombia  
e-mail: [mlopezs@unicauca.edu.co](mailto:mlopezs@unicauca.edu.co)  
[warevalo@unicauca.edu.co](mailto:warevalo@unicauca.edu.co)

Henry Laniado Rodas  
Docente  
Filiación: Universidad del Cauca, Popayán, Colombia  
e-mail: [hlaniado@unicauca.edu.co](mailto:hlaniado@unicauca.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Garantizar la sostenibilidad de la deuda pública no es solo una necesidad financiera, sino un pilar fundamental para la estabilidad económica a largo plazo. Este estudio analiza la dinámica fiscal del Departamento del Cauca, examinando indicadores económicos clave para evaluar la viabilidad de su deuda pública. A través de modelos estadísticos y el uso de datos económicos reales, se desarrolla un marco integral para evaluar la sostenibilidad fiscal y proyectar tendencias futuras de endeudamiento.

Más allá de las restricciones financieras, Cauca enfrenta un desafío socioeconómico crítico con la prevalencia de los cultivos ilícitos. Estos no solo alimentan la inestabilidad económica, sino que también profundizan las desigualdades sociales. La investigación explora estrategias innovadoras de sustitución de cultivos, demostrando cómo la transición hacia una agricultura legal de alto valor puede fortalecer las finanzas públicas, fomentar el crecimiento económico y mitigar los impactos negativos de las economías ilícitas.

Los hallazgos sugieren que una estrategia bien estructurada de gestión de la deuda,

combinada con una transformación agrícola estratégica, puede generar un ciclo positivo de resiliencia económica. Este estudio proporciona a los responsables de políticas públicas una hoja de ruta basada en datos para equilibrar la responsabilidad fiscal con el desarrollo sostenible. Al integrar matemáticas, estadística, economía y políticas públicas, se presenta un enfoque innovador para construir un futuro financiero más sólido y sostenible en el Cauca.

Este trabajo surge de la necesidad de comprender cómo un fenómeno ilegal, persistente y complejo como los cultivos ilícitos de coca, puede estar influyendo en la sostenibilidad fiscal de una región históricamente vulnerable como es el Departamento del Cauca. Más allá de un análisis sólo económico, se busca conectar la teoría matemática y estadística con la realidad territorial, aplicando herramientas de modelación y análisis de datos para extraer conclusiones con valor práctico y social.

A partir de series históricas oficiales (2001–2021), se emplearon modelos de regresión polinómica de segundo grado y ARIMA para proyectar el área sembrada de coca en 2026-2030. El modelo ARIMA obtuvo un MAE de 134,71 y un MAPE de 30,34%, superando en precisión a otras metodologías probadas, incluidas redes neuronales. La validación espacial mediante mapas de calor en QGIS mostró alta concordancia con los datos oficiales del SIMCI (Sistema integrado de monitoreo de cultivos ilícitos), confirmando la tendencia al alza en Colombia y en el Cauca.

En el plano fiscal (2017–2023), el análisis de ingresos, gastos y deuda reveló una correlación positiva fuerte entre las hectáreas netas de coca e ingresos departamentales (Pearson  $r$ ; Spearman  $\rho$ ; Kendall  $\tau$ ), respaldada por intervalos de confianza estrechos obtenidos con bootstrap y validación cruzada LOOCV ( $R^2$ ). Sin embargo, este aumento de ingresos no se ha reflejado en un mayor ahorro, mientras que la deuda pública y el porcentaje destinado a su servicio han crecido, incrementando el riesgo fiscal estructural.

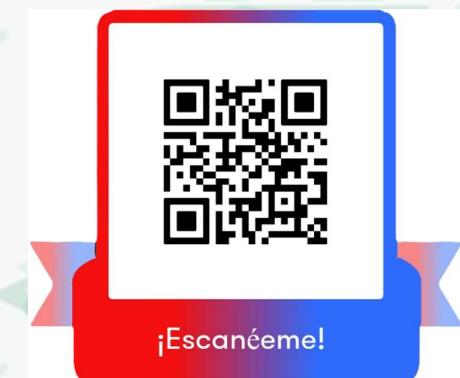
El estudio sugiere que la economía ilícita puede estar generando una “bonanza aparente”: mejora indicadores de corto plazo, pero erosiona la capacidad de ahorro y sostenibilidad financiera. Se proponen estrategias para diversificar la base económica, fortalecer ingresos propios y optimizar el uso de regalías, combinando herramientas estadísticas, análisis geoespacial y modelamiento predictivo para aportar evidencia a la formulación de políticas públicas.

## **Palabras clave**

Aplicativo, Cultivos ilícitos , deuda pública, economía, sostenibilidad.

## Referencias

- [1] Datos Abiertos del Gobierno de Colombia.
- [2] Sistema Integrado de Monitoreo de Cultivos Ilícitos (SIMCI).
- [3] DANE, DNP. Estadísticas Económicas.
- [4] Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). Forecasting: Principles and Practice.
- [5] Pearson, K. (1895). Notes on Regression and Inheritance in the Case of Two Parents.
- [6] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2001). The Elements of Statistical Learning.
- [7] DNP (2023). Reporte Fiscal del Cauca.
- [8] Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. (2021). Introduction to Linear Regression Analysis.
- [9] Gujarati, D. N. (2003). Basic Econometrics.
- [10] UNODC. Programa de Sustitución de Cultivos Ilícitos.
- [11] Banco Mundial. Implementación de Tecnologías tributarias.
- [12] CEPAL. Desarrollo Económico Sostenible.



# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

**Fragilidad estatal en América Latina: una mirada a partir del STATIS**

**Eddy Johanna Fajardo Ortiz**

**Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia**  
**e-mail: [efajardo@unab.edu.co](mailto:efajardo@unab.edu.co)**

**Héctor Romero**

**Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia**  
**e-mail: [hvalbuen@uis.edu.co](mailto:hvalbuen@uis.edu.co)**

**Deicy Villalba**

**Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia**  
**e-mail: [dvillalbar@ut.edu.co](mailto:dvillalbar@ut.edu.co)**

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## **Resumen**

La fragilidad estatal está asociada a la ausencia de instituciones robustas y transparentes, lo que crea oportunidades para el desvío de recursos públicos y el enriquecimiento ilícito. La corrupción generada y la posible ineficiencia resultante reducen drásticamente la capacidad de respuesta de los Estados en atender las necesidades básicas de la población. Servicios esenciales como la salud, la educación, la infraestructura y la seguridad se ven comprometidos, dejando a vastos sectores de la sociedad en una situación de vulnerabilidad. Los factores que contribuyen a la fragilidad estatal son diversos, sin embargo, Elagín [1] lo sintetiza en una serie de condiciones que van desde naciones que cuentan con una base fiscal insuficiente e instituciones políticas imperfectas que fomentan regímenes cleptocráticos hasta una compleja interacción de factores estructurales y de captura de rentas. En la presente investigación se revisa la evolución de los indicadores asociados a la fragilidad estatal para una muestra de veintiséis (26) países de América Latina y el Caribe.

La base de datos proviene del Índice de Fragilidad Estatal desarrollado por el Fondo para la Paz [2] y abarca un periodo que va de 2019 a 2023. La información analizada agrupa doce (12) indicadores relacionados con tópicos sobre cohesión social, económicos, políticos y sociales, con el fin de evaluar la situación de la fragilidad estatal de la región.

Cómo herramienta de análisis estadístico se emplea el STATIS (Structuration des Tableaux à Trois Indices de la Statistique). Según Pagés [3] es una técnica exploratoria multivariante compuesta por tres etapas, la primera se conoce como interestructura la cual permite comparar las matrices de datos llamadas bloques. La segunda etapa se conoce como el compromiso, en donde se comparan los individuos y la tercera etapa se conoce como la intraestructura, en la cual se estudian el comportamiento de cada individuo en cada uno de los bloques.

Se encuentra que la fragilidad estatal ha venido reduciéndose en el periodo de tiempo de estudio, lo que indica un fortalecimiento de las instituciones públicas en la región, siendo el 2023 el año donde se produjo una mayor disminución de la fragilidad estatal. Además, se encuentra que, en el periodo de tiempo estudiado, los indicadores relacionados con la seguridad y las condiciones económicas se incrementaron; mientras que la desigualdad económica se disminuyó.

### **Palabras clave**

Fragilidad estatal, América Latina y el Caribe, Corrupción, Estados fallidos, STATIS.

### **Referencias**

- [1] Elagin, D. P. (2021). Conceptual perspectives on state fragility. *Vestnik MGIMO-Universiteta*, 14(4), 107-135.
- [2] Fondo para la Paz (2025). *Fragile State Index*. Recuperado de la World Wide Web: <https://fragilestatesindex.org/>
- [3] Pagés, J. (2014). Multiple Factor Analysis: General Presentation and Comparison with STATIS. En Blasius, J. y Greenacre, M. (Editores). *Visualization and verbalization of data*. CRC Press. pp. 223-238.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Análisis de datos funcionales para el estudio de curvas de Covid-19 en Colombia

JULIÁN ALFONSO ACUÑA COLLAZOS

Filiación: Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia  
e-mail: [julian.acuna@unimilitar.edu.co](mailto:julian.acuna@unimilitar.edu.co)

ANDRÉS EDUARDO ORELLANO C.

Filiación: Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia  
e-mail: [est.andres.orellano@unimilitar.edu.co](mailto:est.andres.orellano@unimilitar.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

En este trabajo, aplicamos métodos estadísticos para datos funcionales para explorar la heterogeneidad en el número registrado de casos confirmados de Covid-19, a lo largo del tiempo. El número diario acumulado de muertes en las regiones de Colombia se trata como curvas continuas (datos funcionales). El análisis de datos funcionales empleado usa métodos de análisis de componentes principales funcionales y agrupamiento de datos funcionales para explicar la variabilidad entre las curvas de casos e identificar y describir la heterogeneidad potencial en las curvas y sus derivadas funcionales. Los clústeres estimados se etiquetan con diferentes "niveles de alerta" para identificar ciudades en una posible situación crítica. Los resultados obtenidos pueden contribuir a la comprensión del desarrollo de los conteos de casos confirmados de COVID-19.

### Palabras claves

Agrupamiento de datos funcionales, análisis de componentes principales funcionales, análisis de datos funcionales, curvas de Covid-19.

## Referencias

- [1] Abraham, C., Cornillon, P. A., Matzner-Løber, E. R. I. C., & Molinari, N. (2003). Unsupervised curve clustering using B-splines. Scandinavian journal of statistics, 30(3), 581-595.
- [2] Bolano-Ortiz, T. R., Camargo-Caicedo, Y., Puliafito, S. E., Ruggeri, M. F., Bolano-Diaz, S., Pascual-Flores, R., Saturno, J., Ibarra-Espinosa, S., Mayol-Bracero, O.L., Torres-Delgado, E. & Cereceda-Balic, F. (2020). Spread of SARS-CoV-2 through Latin America and the Caribbean region: a look from its economic conditions, climate and air pollution indicators. Environmental research, 191, 109938.
- [3] Boschi, T., Di Iorio, J., Testa, L., Cremona, M. A., & Chiaromonte, F. (2020). The shapes of an epidemic: using Functional Data Analysis to characterize COVID-19 in Italy. arXiv preprint arXiv:2008.04700.
- [4] Carroll, C., Bhattacharjee, S., Chen, Y., Dubey, P., Fan, J., Gajardo, Á., Zhou, X., Müller, H., & Wang, J. L. (2020). Time dynamics of COVID-19. Scientific reports, 10(1), 21040.
- [5] Nepomuceno, M. R., Acosta, E., Alburez-Gutierrez, D., Aburto, J. M., Gagnon, A., & Turra, C. M. (2020). Besides population age structure, health and other demographic factors can contribute to understanding the COVID-19 burden. Proceedings of the National Academy of Sciences, 117(25), 13881-13883.
- [6] Tang, C., Wang, T., & Zhang, P. (2022). Functional data analysis: An application to COVID-19 data in the United States in 2020. Quantitative Biology, 10(2), 172-187.
- [7] Zambom, A. Z., Collazos, J. A., & Dias, R. (2019). Functional data clustering via hypothesis testing k-means. Computational Statistics, 34, 527-549.

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

**Modelado Matemático de la  
Interacción entre Tumores y el Sistema Inmunológico con Consideración de  
Retardos Temporales**

**JEIMY LEANDRA MOYANO RUIZ**

**Filiación:** Universidad de los Llanos, Villavicencio, Colombia

e-mail: [jlmoyanos@unillanos.edu.co](mailto:jlmoyanos@unillanos.edu.co)

**CAROLINA BALLESTEROS VELASQUEZ**

**Filiación:** : Universidad de los Llanos, Villavicencio, Colombia

e-mail: [cballesteros@unillanos.edu.co](mailto:cballesteros@unillanos.edu.co)

## **Resumen**

El presente estudio replica un modelo dinámico de interacción entre células tumorales, linfocitos T e interleucina-2 (IL-2), utilizando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con retardo temporal. Esta línea de investigación se enmarca en el campo de la modelación matemática del crecimiento tumoral y la respuesta inmunitaria, un área que ha experimentado un notable desarrollo desde la segunda mitad del siglo XX.

Los primeros avances significativos en esta área incluyeron el modelo de Stepanova (1979), quien propuso un sistema de EDO para describir la interacción entre el crecimiento tumoral y la actividad inmunitaria. Posteriormente, Kuznetsov et al. (1994) incorporaron la interacción entre células tumorales y efectoras, introduciendo conceptos como la estimulación inmunitaria y el escape tumoral. Más adelante, Kirschner y Panetta (1998) ampliaron este enfoque al incluir la dinámica de la IL-2, una citoquina clave en la activación de linfocitos T citotóxicos.

El modelo replicado en este estudio sigue la propuesta de Sardar et al. (2021), que introduce un retardo temporal entre la producción de IL-2 y la activación de las células inmunitarias, con el objetivo de representar de forma más realista los procesos biológicos de señalización y respuesta. Este enfoque permite analizar cómo los desfases temporales afectan la evolución del sistema tumor-inmunidad.

El modelo está compuesto por tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que describen la dinámica de las poblaciones de células tumorales, células efectoras e IL-2. Se consideran tres formas funcionales para el crecimiento tumoral: logístico clásico, logístico generalizado y exponencial. A partir de estas formulaciones, se identifican los puntos de equilibrio biológicamente significativos —tanto libres de tumor como con coexistencia de poblaciones— y se analiza su estabilidad mediante métodos analíticos lineales. Se examina, en particular, cómo varía la estabilidad de estos equilibrios en función de la estructura del término de crecimiento tumoral y de la incorporación del retardo temporal.

Para la resolución numérica del sistema con retardo, se emplea el método dde23 de MATLAB, adecuado para sistemas donde el estado actual depende de su evolución pasada, como ocurre en los procesos inmunológicos con latencias entre estímulo y respuesta.

En una primera simulación, se analiza la evolución dinámica de las células efectoras y el efecto de la IL-2 en ausencia de células tumorales. La Figura 1 muestra las series temporales del sistema sin retardo temporal ( $\tau = 0$ ), evidenciando la evolución de las poblaciones hacia el punto de equilibrio interior  $E_0=(0,0.359854,0.37037)$ , bajo condiciones iniciales apropiadas y el valor  $d_2=0.3743$ , junto con el resto de los parámetros del sistema.

La Figura 2 ilustra la evolución temporal de las células tumorales, efectoras e IL-2 en torno al punto de equilibrio estable  $E=(4.52127,0.253529,2.68414)$ , también en ausencia de retardo. Se utilizaron condiciones iniciales  $(4.5,0.2,2.6)$  y parámetros establecidos. A diferencia de lo observado en la Figura 1, las simulaciones numéricas con retardo temporal revelan la aparición de oscilaciones en las variables del sistema, un comportamiento que se mantiene independientemente de la función de crecimiento tumoral utilizada.

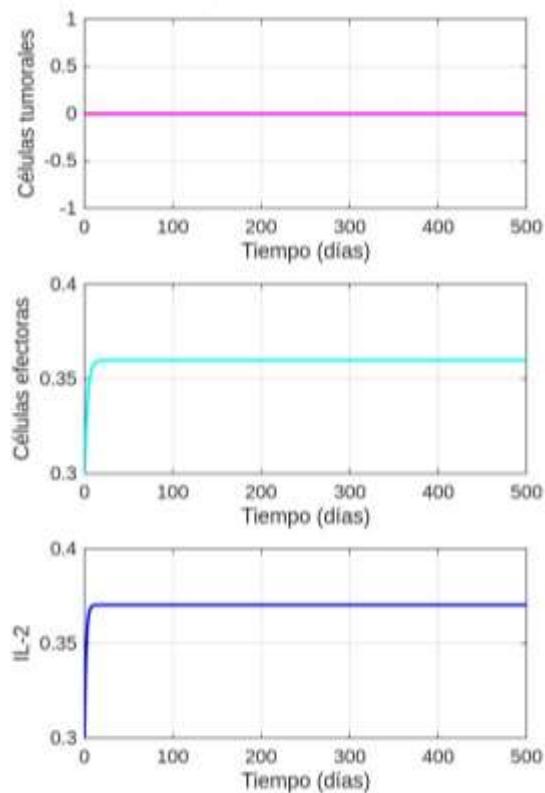
Para validar este hallazgo, se analizaron los diagramas de fase y los puntos fijos del sistema bajo las distintas funciones de crecimiento. La Figura 3 muestra los diagramas de fase correspondientes al punto estable  $E=(4.52127,0.253529,2.68414)$  con condiciones iniciales  $[x(0),y(0),z(0)]=[4.5,0.2,2.6]$ . Las tres columnas representan la evolución del sistema en distintos tiempos: (A)  $t=0.12$ , (B)  $t=0.41$ , y (C)  $t=0.82$ . Los resultados confirman que la dinámica del sistema es independiente de la forma específica del crecimiento tumoral.

Este comportamiento contrasta con modelos como el de Stepanova (1979), en los cuales la dinámica y los puntos fijos dependen fuertemente de la elección de la función de crecimiento. En dicho modelo, la respuesta inmunitaria se basa en células efectoras genéricas activadas por la presencia tumoral, y tanto las trayectorias como los equilibrios del sistema varían según el tipo de función utilizada.

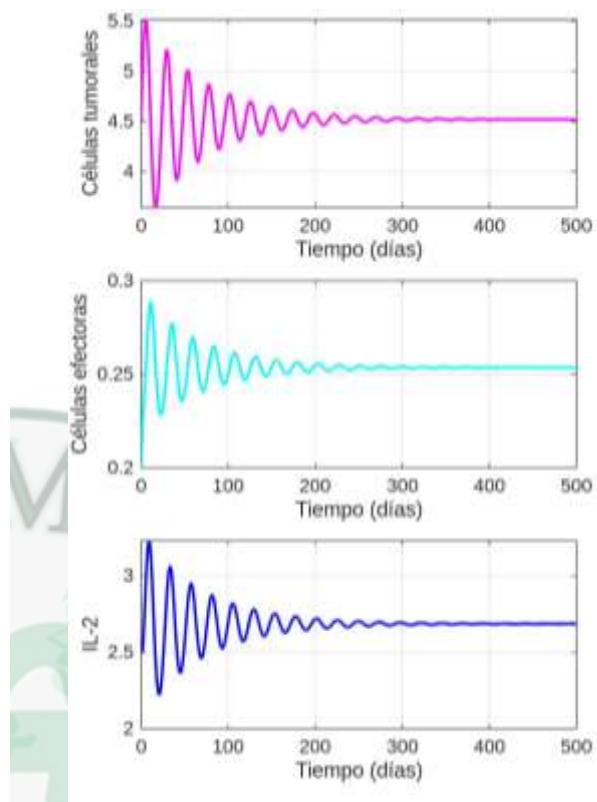
## Palabras clave

Modelado matemático, células tumorales, sistema inmunitario, retardo temporal, bifurcación de Hopf

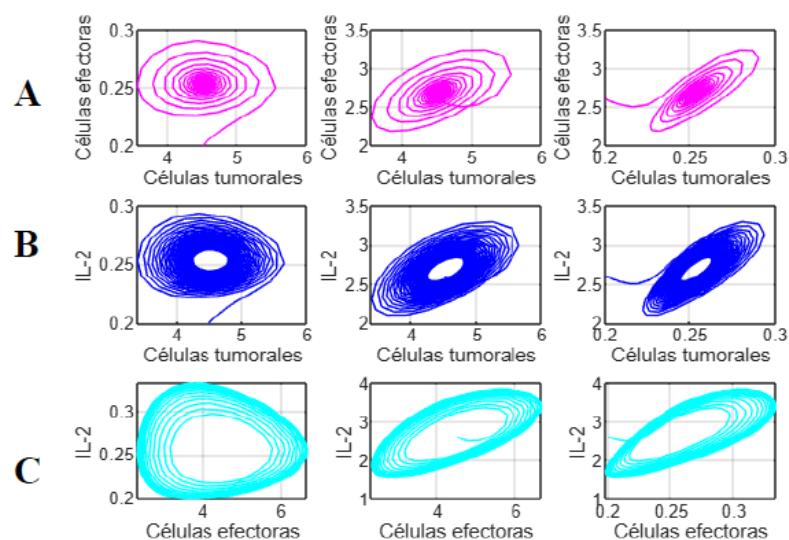
## Simulaciones



**Figura 1:** Series temporales del sistema sin retardo temporal ( $\tau = 0$ )



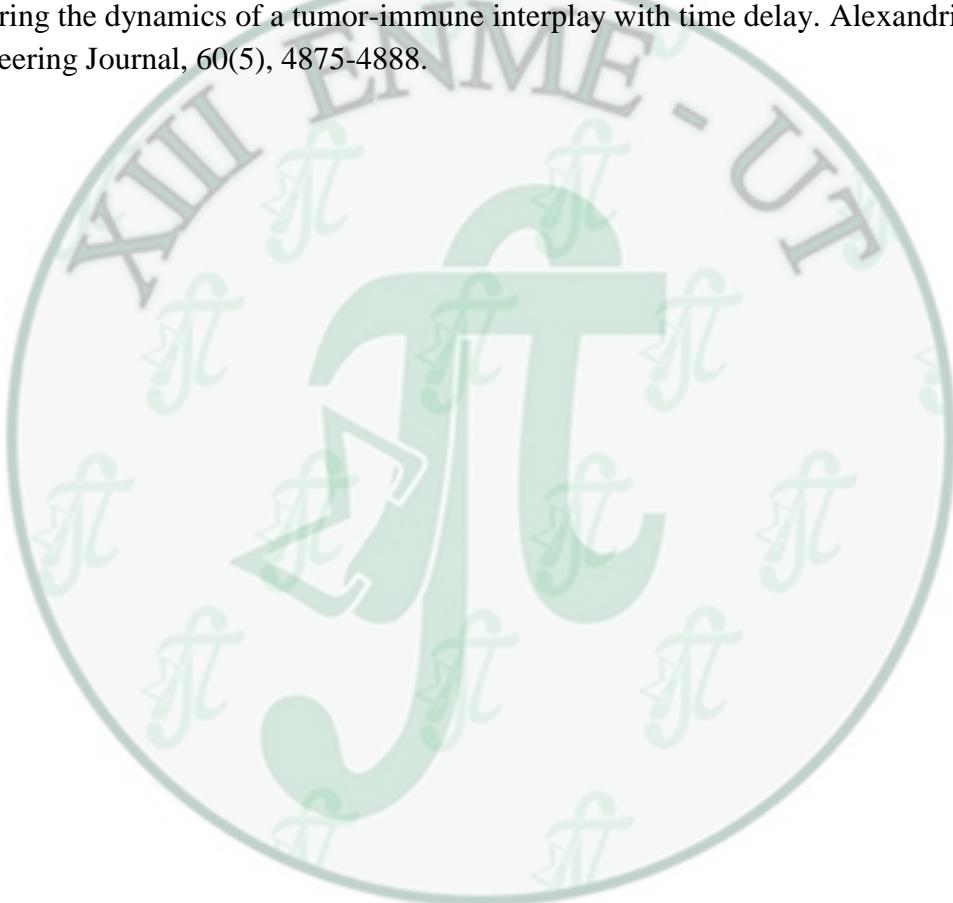
**Figura 2:** Evolución temporal de las células cancerosas, efectoras y la IL-2 alrededor del punto de estabilidad



**Figura 3:** Diagramas de fase con diferentes retardos

## Referencias

- [1] Singer, James (1938). A Theorem in finite projective geometry and some applications to number Theory, *Transactions of the American Mathematical Society*, 43, 377-385 pp.
- [2] Kirschner, D., & Panetta, J. C. (1998). Modeling immunotherapy of the tumor–immune interaction. *Journal of Mathematical Biology*, 37(3), 235–252.
- [3] Sardar, T., Banerjee, S., & Sarkar, R. R. (2021). Time delay effect in cancer–immune dynamics: A mathematical study. *Chaos, Solitons & Fractals*, 150, 111077.
- [4] Sardar, M., Khajanchi, S., Biswas, S., Abdelwahab, S. F., & Nisar, K. S. (2021). Exploring the dynamics of a tumor-immune interplay with time delay. *Alexandria Engineering Journal*, 60(5), 4875-4888.



# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

## **COMPRENSIÓN ESTADÍSTICA DEL OBJETIVO NÚMERO 1 DE LA AGENDA 2030 FIN DE LA POBREZA EN COLOMBIA**

**Edgar Gutiérrez**

**Filiación:** Universidad Autónoma de Bucaramanga  
[egutierrez627@unab.edu.co](mailto:egutierrez627@unab.edu.co)

**Javier Sierra\***

**Juan Carlos Bautista\*\***

**Kevin García\*\*\***

**Asesora: Mg Astrid Liliana Contreras**

**Filiación:** Universidad Autónoma de Bucaramanga  
[jsierra444@unab.edu.co\\*](mailto:jsierra444@unab.edu.co*)  
[jbautista789@unab.edu.co\\*\\*](mailto:jbautista789@unab.edu.co**)  
[kgarcia378@unab.edu.co\\*\\*\\*](mailto:kgarcia378@unab.edu.co***)  
[acontreras793@unab.edu.co](mailto:acontreras793@unab.edu.co)

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

### **Resumen**

En esta charla se describe un análisis estadístico la situación de pobreza en Colombia bajo el marco del Objetivo de Desarrollo Sostenible (ODS) número 1 de la Agenda 2030: “Fin de la pobreza”. Mediante indicadores clave como el umbral internacional de pobreza, el acceso a servicios básicos y la cobertura de programas sociales, se identifican las tendencias, brechas y desafíos en la lucha contra la pobreza. El estudio utiliza medidas de tendencia central y datos desagregados por sexo, edad y región, con el propósito de evaluar la efectividad de las políticas públicas implementadas y proponer estrategias que fortalezcan la inversión social y el desarrollo local. Los hallazgos resaltan que, si bien Colombia ha logrado ciertos avances, persisten desigualdades estructurales que requieren atención urgente para lograr una erradicación efectiva de la pobreza.

### **Palabras clave**

Pobreza, Objetivo de Desarrollo Sostenible (ODS), Colombia, Indicadores estadísticos, Políticas públicas.

## Referencias

- [1] Naciones Unidas (2025). *Objetivo 1: Fin de la pobreza.* Naciones Unidas. <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/poverty/>
- [2] Banco Mundial (2022, mayo 2). *Reseña: Ajuste en las líneas mundiales de pobreza.* <https://www.bancomundial.org/es/news/factsheet/2022/05/02/fact-sheet-an-adjustment-to-global-poverty-lines>
- [3] Banco Mundial (2024, octubre 15). *Medición de la pobreza.* <https://www.worldbank.org/en/topic/measuringpoverty>
- [4] Concern Worldwide (2024, agosto). *How is poverty measured? The international poverty line, explained.* <https://concernusa.org/news/how-is-poverty-measured-international-poverty-line/>
- [5] Departamento Administrativo Nacional de Estadística – DANE (2024). *Pobreza multidimensional.* <https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/pobreza-y-condiciones-de-vida/pobreza-multidimensional>

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

Identificación de factores socioambientales, económicos, culturales y académicos que inciden en la conciencia ambiental utilizando metodología multivariada institución educativa general Anzoátegui.

## **AUTOR QUE REALIZA LA PONENCIA**

Zamora-Rodríguez Edwar Janeider.

**Filiación:** Maestrante Maestría en educación Universidad del Tolima, Ibagué,  
Colombia, ejzamorar@ut.edu.co

## **OTROS AUTORES**

Rodríguez-Márquez M.

Facultad ciencias Económicas y Administrativas, Profesor asociado, PhD Ciencias  
Agrarias, Universidad del Tolima.

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## **Resumen**

En los últimos cuatro decenios se viene incrementando los problemas ambientales que tienen origen de causalidad antropogénicas, esto debido a la progresiva demanda de bienes y servicios en atención al crecimiento exponencial de la población en el orden mundial. Esta problemática es cada vez más evidente debido a cambios de uso del suelo incide en el entorno ambiental de los diversos contextos regionales, lo cual está asociado con múltiples factores de orden económico, sociodemográfico, político, culturales y académicos, que se pueden direccionar en parte mediante un cambio de conciencia ambiental de las actuales y futuras generaciones desde la orientación en los proyectos educativos institucionales en la formación en buenas prácticas ambientales en la convivencia económica, social sustentable en el tiempo y espacio de los recursos naturales.

En este estudio se implementa una metodología multivariada de caracterización de la conciencia ambiental en el entorno académico institucional con base en información de las percepciones estudiantes de los grados sexto, noveno y once, en la comunidad educativa en Anzoátegui Tolima, con el propósito de dirigir los temas a trabajar desde el área de Ciencias Naturales y Educación Ambiental. En el proceso metodológico de caracterización, se realizó una recolección de datos mediante una encuesta con preguntas tipo Likert sobre variables relacionadas con las interacciones persona-ambiente. Esto permitió identificar y caracterizar, mediante un análisis de factores, la percepción sobre el nivel de conciencia ambiental. Este estudio se llevó a cabo debido a la necesidad de proyectar una sustentabilidad para la preservación del recurso ambiental

en el municipio de Anzoátegui, el cual posee características privilegiadas en términos de recursos ambientales geoespaciales. Anzoátegui se encuentra en la zona del parque nacional de los Nevados, con una extensión de 471 km<sup>2</sup>, mayormente en zonas rurales, con una extensa y variada biodiversidad en flora y fauna, recursos hidrográficos, bosques y páramos. Con la información recopilada, se realizó una evaluación y caracterización de la dinámica asociada a la conciencia ambiental mediante un análisis de correspondencias múltiples. Este análisis identificó las características de los factores que inciden en el desarrollo de fortalezas y habilidades en los estudiantes y la comunidad educativa en relación con la preservación de los recursos ambientales sustentables en el contexto regional y, en un orden más amplio, de los ecosistemas en cada región

**Palabras clave:** Conciencia ambiental, correspondencias múltiples, factores social-demográficos, sustentabilidad ambiental.

## Referencias:

- [1] Ardoín, N. M., Bowers, A. W., & Gaillard, E. (2020). Environmental education outcomes for conservation: A systematic review. *Biological Conservation*, 241, 108224.
- [2] Caicedo-Ortiz, S. Y., & Pérez-Botero, D. M. (2022). Propuesta Pedagógica Apoyada en el Google Sites Para el Mejoramiento de la Cultura Ambiental en la Comunidad de la Vereda las Pavas Villahermosa Tolima.
- [3] Calonge, A., Molina-Navarro, E., & Alfaro, P. (2022). Training and Dissemination About the Environment: Keys to Impulse the Abiotic Component of Environmental Education. In *Enhancing Environmental Education Through Nature-Based Solutions* (pp. 9-23). Cham: Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-91843-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-91843-9_2)
- [4] Constitución Política Nacional de 1991. <https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma.php?i=4125>
- [5] Contraloría departamental del Tolima (2020). informe estado de los recursos naturales y del medio ambiente del departamento del Tolima vigencia -2019. Ibagué, noviembre de 2020
- [6] Flórez-Yepes, G. Y., Rincón-Santamaría, A., Santiago-Cardona, P., & gallego, F. A. (2018). Herramientas de aprendizaje para favorecer la educación ambiental. Caso de estudio Fundación Niños de Los Andes sede Manizales, Colombia. *Revista Electrónica Educare*, 22(2), 67-87.
- [7] Gavilanes Capelo, R. M., & Tipán Barros, B. G. (2021). La Educación Ambiental como estrategia para enfrentar el cambio climático. *ALTERIDAD. Revista de Educación*, 16(2), 286-298. <https://doi.org/10.17163/alt.v16n2.2021.10>

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

## **Comunicación**

### **Análisis espacial de los niveles de desempeño en competencias genéricas de las pruebas Saber Pro-2023 por departamentos en Colombia**

#### **Autores**

**Miguel Armando Rodríguez Marquéz**  
**Universidad del Tolima, Departamento de Economía y Finanzas,**  
[marodriguezm@ut.edu.co](mailto:marodriguezm@ut.edu.co)

**Joaquín González Borja**  
**Universidad del Tolima, Departamento de Matemáticas y Estadística,**  
[jgonzalezb@ut.edu.co](mailto:jgonzalezb@ut.edu.co)

**Ibagué, Colombia**  
**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

#### **Resumen:**

En este estudio se presenta un análisis espacial de los niveles de desempeño en las competencias genéricas evaluadas por las pruebas Saber Pro en Colombia del año 2023, desagregado por departamentos. Las competencias genéricas analizadas incluyen lectura crítica, razonamiento cuantitativo, comunicación escrita, competencias ciudadanas e inglés. A partir de los datos oficiales suministrados por el ICFES, se emplearon técnicas de estadística espacial como la autocorrelación espacial (Índice de Moran) y la interpolación mediante kriging para identificar patrones de distribución, clústeres espaciales y disparidades regionales en el rendimiento académico. Los resultados evidencian la existencia de agrupamientos departamentales con desempeño significativamente alto o bajo, lo cual sugiere la influencia de factores socioeconómicos, educativos y geográficos en el desarrollo de las competencias evaluadas. Este enfoque permite visualizar de forma integral las inequidades regionales en la calidad de la educación superior y ofrece insumos valiosos para la formulación de políticas públicas orientadas al cierre de brechas territoriales en el ámbito educativo.

#### **Palabras clave:**

Competencias Genéricas, Estadística Espacial, Niveles de Desempeño, Pruebas Saber Pro.

## **Referencias:**

- [1] Chanchí, G.E., Ospino, M.E., & Muñoz, L.F. (2021). Application of Spatial Data Science on Results of the Saber 5 Test. *Revista Facultad de Ingeniería*, vol. **30** (58).
- [2] Chanchí, G.E., Ospina, M.A., y Pinedo, J.A. (2025). Análisis espacial del rendimiento académico en las áreas de sistemas y telemática de las pruebas Saber Pro en el Caribe colombiano. *Investigación e Innovación en Ingenierías*, vol. **13**(1).
- [3] Fernández, R., y Cotos, T. (2022). *Estadística Espacial con R*. E-book: [https://rubenfcasal.github.io/estadistica\\_espacial](https://rubenfcasal.github.io/estadistica_espacial)
- [4] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación-ICFES (2025). *DataIcfes: Repositorio de Datos Abiertos del ICFES*. 06. Saber Pro [Datos Abiertos].

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Comunicación:

**Comunicar con datos: uso de R y Quarto para la visualización narrativa en investigación formativa**

**Linda Yicel Sandoval Rubio**

Universidad del Tolima

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[lysandovalr@ut.edu.co](mailto:lysandovalr@ut.edu.co)

**Julie Kimberly Ramirez Briñez**

Universidad del Tolima

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[jkramirezb@ut.edu.co](mailto:jkramirezb@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Este trabajo presenta los avances de un proyecto desarrollado en el semillero de investigación RP::DATUM, orientado a la formación de competencias en análisis y comunicación de datos mediante herramientas del ecosistema R. El eje central de la experiencia es el uso de datos abiertos, haciendo énfasis en la visualización de datos como un componente fundamental del análisis exploratorio y de la comunicación científica. En particular, se utiliza el paquete ggplot2 de R para construir visualizaciones claras, estéticas y adaptadas con el fin de comunicar hallazgos de manera efectiva a públicos técnicos y no técnicos.

Además, se destaca el uso de Quarto, una herramienta moderna de publicación científica que permite integrar código, texto y visualizaciones en documentos reproducibles, dinámicos y bien estructurados. Con Quarto, los participantes del semillero aprenden a construir informes y presentaciones interactivas, incorporando elementos de storytelling para fortalecer la narrativa detrás de los datos.

El enfoque pedagógico de este trabajo no se limita al desarrollo técnico, sino que promueve una comprensión crítica del rol de los datos y su comunicación en la toma de decisiones. Se busca formar estudiantes con capacidades para analizar, visualizar y contar historias basadas en evidencia, utilizando herramientas accesibles y potentes como R, ggplot2 y Quarto.

## **Palabras clave:**

Datos abiertos, ggplot2, Quarto, Storytelling, Visualización de datos.

## **Referencias**

- [1] Allaire, J. J.; Iannone, R.; Xie, Y.; Dervieux, C.; Borges, B.; Marti, F. (2023). *Quarto: Scientific and Technical Publishing*. Posit Software, PBC. Disponible en: <https://quarto.org/>
- [2] Gobierno de Colombia (2024). *Portal de Datos Abiertos de Colombia*. Datos abiertos para el desarrollo y la innovación. Disponible en: <https://www.datos.gov.co/>
- [3] Kaggle Inc. (2024). *Kaggle: Your Machine Learning and Data Science Community*. Disponible en: <https://www.kaggle.com/>
- [4] Wickham, Hadley (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. 2nd ed., Springer, 260 pp.
- [5] Knafllic, Cole Nussbaumer (2015). *Storytelling with Data: A Data Visualization Guide for Business Professionals*. Wiley, 288 pp.
- [6] OpenAI (2025). *ChatGPT: Asistente conversacional basado en modelos de lenguaje de inteligencia artificial*. Modelo GPT-4-turbo. Disponible en: <https://chat.openai.com/>

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

## **Comunicación**

### **Indicadores multivariados para determinar factores socioculturales y tecnológicos en sistemas silvopastoriles ganaderos en fincas Honda, Tolima**

#### **Autores**

<sup>1</sup>Benitez-Oviedo Sonia Y.; <sup>2</sup> Mora-Delgado Jairo; <sup>3</sup>Pérez Rubio Roció; <sup>4</sup>Rodríguez-Márquez M.

<sup>1</sup>Maestrante Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia, Universidad del Tolima, sybenitez@ut.edu.co; <sup>2</sup>Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia, PhD Sistemas de Producción Agrícola, Profesor Titular, Universidad del Tolima, jrmora@ut.edu.co; <sup>3</sup>Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia, PhD (c) Ciencias Agrarias, Universidad del Tolima, maria.perezru@campusucc.edu.co; <sup>4</sup>Facultad ciencias Económicas y Administrativas, Profesor asociado, PhD Ciencias Agrarias, Universidad del Tolima.

**Ibagué, Colombia**  
**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

#### **Resumen:**

Este estudio presenta una metodología multivariante para la estimación de indicadores para evaluar factores técnicos y socioculturales asociados con la dinámica de arreglos silvopastoriles para determinar la dinámica en la adopción de tecnologías silvopastoriles (SSP) en ganaderías bovinas de Honda (Tolima). El propósito es contribuir en la difusión y conciencia ecológica, mediante la identificación de factores relevantes en sistemas productivos para implementar factores asociados con la adopción y propuesta de líneas de acción, que logren su incorporación. El objetivo es identificar factores correlacionados en la proyección de sistemas silvopastoriles (SSP), que representan una opción para una ganadería bovina sostenible y ecológicamente viable. La escasa adopción de tecnologías silvopastoriles en sistemas ganaderos bovinos tiene gran influencia con el desarrollo rural, ampliando las barreras para la transición de una ganadería sostenible enmarcada en la preservación de suelos, fuentes naturales y calidad de los productos.

#### **Palabras clave:**

Análisis multivariado, Arreglos silvopastoriles, desarrollo regional, geoestadística, Indicadores ganaderos.

## **Referencias:**

- [1] Alayon-Gamboa, J. A. (2016). Estrategias silvopastoriles para mitigar efectos del cambio climático en sistemas ganaderos del sur de México. *Agro productividad*, 9(9).
- [2] Contreras-Santos, J. L., Martínez-Atencia, J., Cadena-Torres, J., & Falla-Guzmán, C. K. (2020). Evaluación del carbono acumulado en suelo en sistemas silvopastoriles del Caribe Colombiano. *Agronomía Costarricense*, 44(1), 29-41.
- [3] Gutiérrez, D., Crespo, G. J., Mora, L., Scull, I., La, O., González, J., ... & Martínez, Y. (2014). Tithonia diversifolia, sus posibilidades en sistemas ganaderos. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*, 48(1), 79-82.
- [4] Lerma-Lasso, J. L., Bacca-Acosta, P. P., Obando-Enriquez, B. G., Castro-Rincón, E., & Cardona-Iglesias, J. L. (2023). Sistemas silvopastoriles: una opción para la sostenibilidad de los sistemas ganaderos de alta montaña. *Pastos y Forrajes*, 46.
- [5] Mauricio, R. M., Ribeiro, R. S., Paciullo, D. S. C., Cangussú, M. A., Murgueitio, E., Chará, J., & Estrada, M. X. F. (2019). Silvopastoral systems in Latin America for biodiversity, environmental, and socioeconomic improvements. In *Agroecosystem diversity* (pp. 287-297). Academic Press.
- [6] Sánchez-Romero, R., Balvanera, P., Castillo, A., Mora, F., García-Barrios, L. E., & González-Esquivel, C. E. (2021). Management strategies, silvopastoral practices and socioecological drivers in traditional livestock systems in tropical dry forests: An integrated analysis. *Forest Ecology and Management*, 479, 118506.
- [7] Vásquez, H. V., Valqui, L., Castillo, M. S., Alegre, J., Gómez, C. A., Bobadilla, L. G., & Maicelo, J. L. (2020). Caracterización de Sistemas Silvopastoriles en la cuenca ganadera de Molinopampa, Zona Noroccidental del Perú. *Temas agrarios*, 25(1), 23-34.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Comunicación: Convergencia en la distancia de  
Mallows de cadenas de Markov de cola pesada

MARTA LIZETH CALVACHE HOYOS

Universidad Federal de Sergipe (Brasil)

e-mail: martacalvache@academico.ufs.br

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

En esta comunicación presentamos los resultados obtenidos en el artículo [1] titulado “Mallows Distance Convergence for Heavy-Tailed Markov Chains: Regeneration Approach”. En dicho trabajo, exploramos la distancia de Mallows (también conocida como distancia de Wasserstein) para obtener resultados asintóticos en cadenas de Markov irreducibles y recurrentes positivas que poseen una distribución límite con colas pesadas. Esto nos lleva a considerar la clase más importante de distribuciones con colas pesadas: las distribuciones  $\alpha$ -estables. Gracias a su propiedad de divisibilidad infinita, estas distribuciones desempeñan un papel central en el estudio del comportamiento asintótico de sumas parciales normalizadas, de forma análoga al rol que cumple la distribución normal ( $\alpha = 2$ ) entre las distribuciones con segundo momento finito.

Una herramienta útil para trabajar con leyes estables es la distancia

de Mallows,  $d_r(F, G)$ , que mide la discrepancia entre dos funciones de distribución  $F$  y  $G$ . Para  $r > 0$ , se define como:

$$d_r(F, G) = \inf_{(X, Y)} \{\mathbb{E}(|X - Y|^r)\}^{1/r}, \quad X \stackrel{d}{=} F, Y \stackrel{d}{=} G, \quad (1)$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los pares de variables aleatorias  $(X, Y)$  con distribuciones marginales  $F$  y  $G$ . Además de ser una métrica para  $r \geq 1$ , su estrecha relación con la convergencia en distribución ha permitido obtener resultados tipo Teorema Central del Límite para distribuciones estable. Otras aplicaciones incluyen pruebas de bondad de ajuste y resultados asintóticos en teoría de valores extremos.

Consideramos ahora una cadena de Markov  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  cuya distribución de equilibrio tiene media finita pero varianza infinita. Para  $1 < \alpha < 2$ , buscamos condiciones bajo las cuales exista una variable aleatoria  $\alpha$ -estable  $Z_\alpha$  tal que:

$$d_\alpha \left( \frac{S_n^X - b_n}{a_n}, Z_\alpha \right) \rightarrow 0, \quad \text{donde } S_n^X = \sum_{k=0}^n X_k, \quad (2)$$

con constantes de normalización  $a_n > 0$  y  $b_n$ . Esto implica la convergencia en distribución:

$$\frac{S_n^X - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Z_\alpha. \quad (3)$$

En el caso particular gaussiano ( $\alpha = 2$ ), existen resultados clásicos como los de Chung (1962) y Glynn y Whitt (1993).

Dado que las cadenas de Markov irreducibles y recurrentes en espacios numerables, así como las cadenas de Harris con un átomo en espacios generales, son procesos regenerativos, enfocamos nuestro estudio en ese marco.

## References

- [1] M.L.Calvache-Hoyos, C.C.Y.Dorea, E.S.Silva, W. M.Soares. *Mallows distance convergence for heavy-tailed Markov chains: regeneration approach* Teor. Veroyatnost. i Primenen. 2025. Vol 70:3, (2025), 531-540.
- [2] Chung, K.L. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1962.

- [3] Glynn, P.W.; Whitt, W. *Limit theorems for cumulative processes*. Stochastic Processes and their Applications. v. 47, p. 299-314, 1993.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Programación No Lineal en Estadística: Análisis de una aplicación

ALFONSO SÁNCHEZ HERNÁNDEZ

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [asanchez@ut.edu.co](mailto:asanchez@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

El presente trabajo intenta dar a conocer la importancia, utilización y aplicación de la Programación No Lineal (PNL), herramienta propia del análisis matemático, en un problema propio de la Estadística, utilizando una distribución de mezcla de normales, se deduce la función de verosimilitud multiparamétrica del problema, se establecen las condiciones iniciales, se describe el algoritmo en *R*, y se implementa mediante la aplicación a datos reales.

### Palabras claves

Programación no lineal, máxima verosimilitud, condiciones iniciales, restricciones.

### Referencias

- [1] Venables, W.N. & Ripley, B.D. (2002). *Modern Applied Statistics with S*, Springer.
- [2] Bazzara, M.S, Sherali, H.D & Shetty, C.M. (2005). *Non Linear Programming: Theory and Algorithms*, Jhon Wiley & Sons Inc, New York.

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA



**COMUNICACIONES  
EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Inteligencia Artificial y Educación Matemática:  
algunas tendencias de trabajo a partir de una revisión a la literatura

**MICHAEL ANDRES BARRETO PINILLA**

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

e-mail: [mabarretop@upn.edu.co](mailto:mabarretop@upn.edu.co)

**BRANDON YESID PEREZ MORENO**

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

e-mail: [byperezm@upn.edu.co](mailto:byperezm@upn.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Introducción

En los últimos años la inteligencia artificial (IA) ha adquirido un papel cada vez más relevante en distintos campos del conocimiento, incluyendo la educación matemática. Su incorporación en los procesos de enseñanza y aprendizaje abre nuevas posibilidades para el diseño de tareas, la personalización de experiencias, la construcción de estrategias pedagógicas innovadoras, entre otras acciones relacionadas con el quehacer docente. Sin embargo, también plantea interrogantes relacionados con sus alcances, limitaciones y pertinencia en escenarios educativos específicos.

En este contexto, la presente ponencia se deriva como resultado parcial de un trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuyo objetivo general consiste en diseñar una secuencia de tareas para un curso universitario de estadística mediadas por herramientas de inteligencia artificial. Como parte de dicho proceso, se llevó a cabo una revisión documental orientada a reconocer antecedentes, usos y aproximaciones de la IA en la enseñanza de las matemáticas. Así, esta ponencia recoge los resultados de dicha revisión, en tanto se considera que estos son un aporte que puede contribuir como insumo para la consolidación de las líneas de investigación que abordan el papel de la IA en la educación matemática.

Para llevar a cabo la revisión se siguieron algunos criterios de sistematicidad con el fin de garantizar su validez y replicabilidad. En particular, por el auge del tema y los propósitos de la revisión, se buscaron solamente documentos académicos publicados entre los años 2024 y 2025. Aunque esta podría parecer una ventana de observación muy restringida, lo cierto es que se obtuvo una cantidad de documentos inabarcable, con lo que no fue necesario ampliarla más. Por otra parte, la búsqueda se realizó en las bases de datos: Dialnet, ERIC y Scopus a través de una ecuación de búsqueda simple. Lo anterior garantizó que los documentos obtenidos fueran

los usuales para este tipo de trabajos (*i. e.*, artículos de investigación, memorias de eventos, libros o capítulos de libro). Más adelante se precisan los elementos metodológicos de la propuesta.

La revisión bibliográfica realizada muestra cómo la IA ha sido integrada en la educación en matemáticas en distintos niveles de escolaridad y con diversas finalidades. Este panorama plantea las bases de una reflexión que posibilita, por un lado, reconocer estrategias usuales en el uso de la IA en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, por otro lado, reconocer oportunidades para la elaboración de nuevas propuestas de trabajo e investigaciones.

## Desarrollo

La búsqueda de documentos especializados se realizó en tres bases de datos con características complementarias. En primer lugar, ERIC (*Education Resources Information Center*), una de las principales bases internacionales centrada en la investigación educativa, que ofrece artículos académicos, informes técnicos y literatura especializada en pedagogía. En segundo lugar, Dialnet, portal de amplia difusión en el ámbito iberoamericano, especializado en producción académica en lengua española, lo que permitió acceder a investigaciones contextualizadas en realidades educativas más cercanas. Asimismo, se empleó Scopus, base de datos de diversos campos del conocimiento principalmente en idioma inglés. Finalmente, se utilizó Funes, un repositorio colombiano dedicado exclusivamente a la educación matemática que concentra tesis, ponencias y artículos de la comunidad académica latinoamericana y mundial en esta área particular del conocimiento. Al respecto, cabe agregar que la búsqueda se realizó en idiomas español e inglés.

Por otra parte, con el fin de contribuir a la pertinencia y actualidad de los documentos recolectados, se estableció como criterio de inclusión la temporalidad, considerando únicamente publicaciones realizadas entre 2024 y 2025. Además, se definió una estrategia de exploración homogénea en cada una de las bases, empleando la ecuación de búsqueda «“mathematics education” AND “AI”». A través de esta búsqueda se obtuvieron, en principio, 50 documentos que son los que se comentarán a lo largo de este documento. Este análisis tuvo en cuenta los planteamientos de Mak y Thomas (2022); Centeno-Caamal et al., (2023); Petticrew y Roberts (2006) quienes plantean una forma de realizar revisión sistemática de literatura especializada.

El análisis de las publicaciones obtenidas permitió identificar líneas de acción reportadas en la literatura reciente, particularmente aquellas relacionadas con la integración de la inteligencia artificial en distintos niveles de escolaridad y temáticas de la educación matemática.

Para la organización de los documentos recopilados, estos se organizaron en una tabla con las siguientes columnas: año, autor(es), título, palabras clave, tipo de documento y pertinencia.

La columna de pertinencia permitió determinar si un documento debía ser incluido o no en el análisis. Para precisar la pertinencia, una vez se realizó una revisión parcial de los cincuenta documentos (selección por medio de títulos, palabras claves y lectura de resúmenes) se propusieron tres criterios establecidos a través de las características comunes en los documentos. Los criterios que se usaron se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1.**

*Criterios establecidos para valorar la pertinencia de los documentos recolectados*

Experiencia de enseñanza	Presencia de contenido matemático o estadístico	Prácticas docentes
El documento presenta evidencias sobre cómo la IA impacta de facto la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de experiencias específicas.	El documento aborda al menos un objeto o proceso propio de las matemáticas o la estadística.	El documento aporta a la reflexión sobre estrategias de enseñanza, diseño de actividades, evaluación y acompañamiento al aprendizaje y otras prácticas docentes diferentes a la enseñanza en aula.

Adicionalmente, se estableció un porcentaje a cada criterio de inclusión para determinar la pertinencia de los documentos de la siguiente manera: Experiencia de enseñanza, 30%; Presencia de contenido matemático o estadístico, 35% y Prácticas docentes, 35%. Esta distribución surge de la idea de que hay un mayor uso de la IA en otros momentos ajenos al aula (tales como, planeación, diseño de material y evaluación) lo que se refleja en varios documentos. En todo caso, esta ponderación contribuye a que la pertinencia o no de un documento no se reduzca a una decisión dicotómica de sí o no.

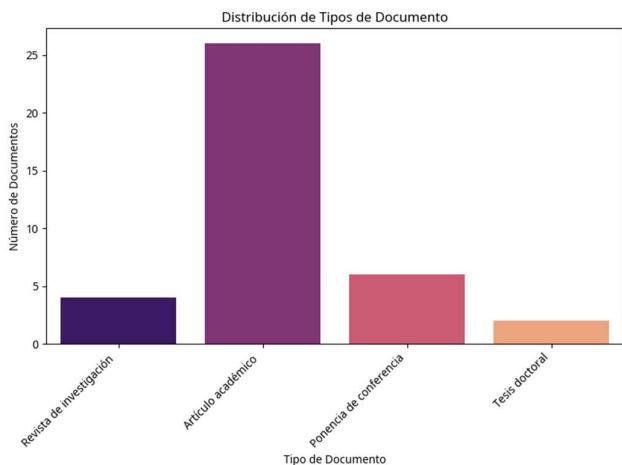
Una vez categorizados los 50 documentos, se concluyó que 38 pueden guardar coherencia con los fines pretendidos en el trabajo. Así, sobre estos 38 documentos se realizó un análisis descriptivo a través de herramientas de inteligencia artificial (*v. g.*, Voyant y ChatGPT). Los resultados del análisis se presentan enseguida.

### **Análisis Descriptivo y Resultados**

En la Figura 1 sobre la distribución de tipos de documento se observa que los artículos académicos representan la mayor proporción (26 de los 38 documentos), seguidos por las ponencias de conferencia (6), las revistas de investigación (4) y finalmente las tesis doctorales (2). Esta predominancia de artículos académicos refleja un énfasis en la producción científica validada por pares, mientras que las ponencias y revistas contribuyen a la divulgación y discusión de resultados de investigación.

**Figura 1.**

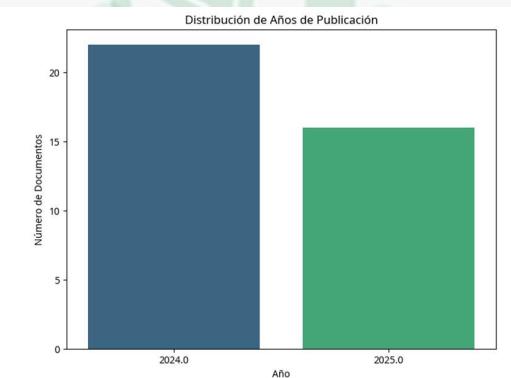
*Gráfica sobre tipos de documentos recolectados*



Por su parte, en la Figura 2 correspondiente a los años de publicación de los documentos se observa que la mayoría de ellos fueron publicados en el año 2024. Este resultado puede explicarse, en parte, porque el año 2025 aún no ha concluido, lo que limita la cantidad de documentos registrados hasta el momento. No obstante, llama la atención que en ocho meses del 2025 la productividad en relación con el tema se encuentra muy cerca de la productividad alcanza en el año anterior.

**Figura 2.**

*Gráfica sobre publicaciones por año*



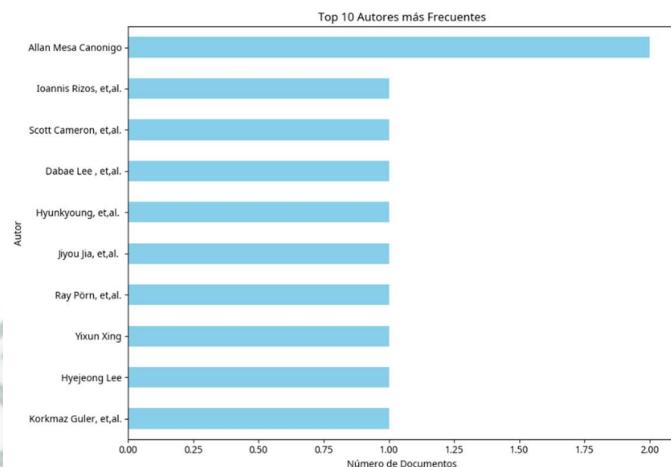
Asimismo, la concentración en 2024 también refleja una tendencia de creciente interés en la temática abordada, lo cual sugiere un periodo de producción académica especialmente activo. Además, se puede proyectar que en los años posteriores continúe este ritmo de publicaciones, evidenciando un posible crecimiento sostenido en la producción científica relacionada con el tema, tal como se infiere a partir de la búsqueda realizada.

De otro lado, la Figura 3, que refiere a los autores más frecuentes, muestra una amplia diversidad, a pesar de que la mayoría de los autores participan con un único documento. Sin embargo, destaca Allan Mesa Canonigo, con dos contribuciones, constituyéndose en el autor de mayor frecuencia en la muestra. Esta dispersión en la autoría sugiere que el campo de estudio cuenta con una base amplia de investigadores, aunque todavía con escasa repetición en

colaboraciones múltiples. Por otra parte, se muestra un amplio interés en esta temática por parte de investigadores del continente asiático en su mayoría.

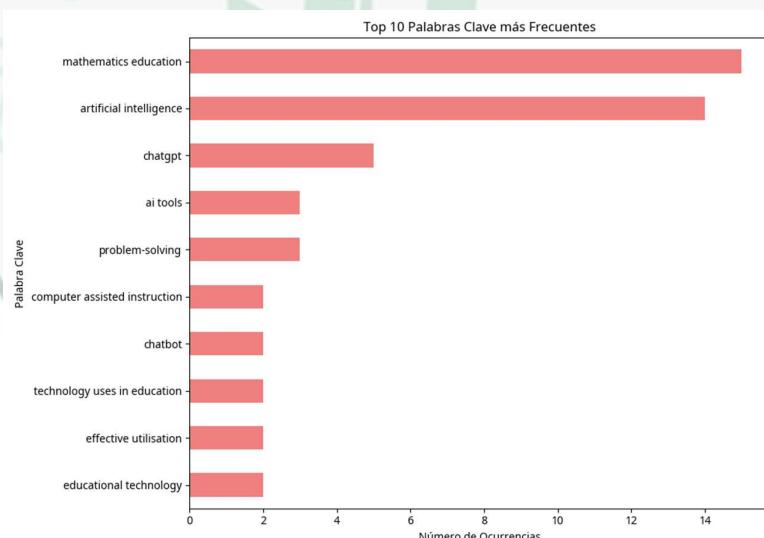
**Figura 3.**

*Gráfica sobre autores más frecuentes en los documentos*



**Figura 4.**

*Gráfica sobre palabras clave más frecuentes*



En relación con las palabras clave, la Figura 4 señala que los términos más frecuentes son “*mathematics education*” (15) y “*artificial intelligence*” (14), como era de esperar. A estos se suman otros de relevancia actual como “*ChatGPT*” (5), “*AI tools*” (3) y “*problem-solving*” (3). Esta distribución permite identificar un claro énfasis en la intersección entre la enseñanza de las matemáticas y la incorporación de herramientas de inteligencia artificial, en particular aplicaciones basadas en modelos de lenguaje. Las palabras clave menos frecuentes, en cambio, amplían el espectro temático y reflejan exploraciones emergentes, aunque menos desarrolladas.

## Ejercicio comparativo

Una vez realizado el análisis descriptivo presentado, se consolidó un documento en el cual se presentaban los resúmenes de los textos que fueron seleccionados según los criterios de inclusión anteriormente mencionados. La Tabla 2 presenta cuatro índices o categorías principales que se analizan desde tres IA: Deepseek, ChatGPT y Perplexity con el fin de realizar un ejercicio comparativo entre estas. Es importante mencionar que Deepseek y ChatGPT se utilizó en su versión gratuita al público, mientras que Perplexity se utilizó en versión plus.

Inicialmente, se formuló el siguiente mensaje para cada una de las IA: «según los resúmenes proporcionados, ¿qué se puede decir acerca de los temas de educación matemática, estadística e inteligencia artificial? ¿Qué artículos no pertenecen a esta línea de estudio? y ¿por qué?».

**Tabla 2. Comparación entre diferentes IA**

Índices	Deepseek	ChatGPT	Perplexity
Educación Matemática e Inteligencia Artificial	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Personalización del aprendizaje</li> <li>• Herramientas de IA como apoyo a docentes y estudiantes.</li> <li>• Fomento de habilidades metacognitivas y de pensamiento crítico</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Transformación por la IA</li> <li>• Personalización y accesibilidad</li> <li>• Innovación en métodos de enseñanza.</li> <li>• Formación docente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Integración de IA en el diseño de tareas, planificación de clases y generación de material didáctico para la enseñanza de matemáticas en distintos niveles escolares.</li> <li>• Análisis del impacto de la IA en prácticas docentes, desarrollo profesional y autoeficacia de los maestros en formación.</li> <li>• Estudios empíricos sobre la mejora en la comprensión conceptual, confianza y motivación de los estudiantes al utilizar tecnologías basadas en IA.</li> </ul>
Estadística	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque en educación estadística mediada por IA</li> <li>• Contenido estadístico en evaluaciones y materiales didácticos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Integración de la IA en la enseñanza de estadística y ciencia de datos</li> <li>• Evaluación en estadística con apoyo de IA</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Varias investigaciones consideran el uso de modelos de IA para la enseñanza de temas estadísticos y el análisis de datos, así como para evaluar procesos y resultados educativos.</li> <li>• La estadística aparece como contenido matemático esencial, sobre todo en trabajos que examinan la solución de problemas, el desarrollo de evaluaciones y la mejora de plataformas educativas digitales.</li> </ul>

Alineación de los textos	<ul style="list-style-type: none"> <li>“Resúmenes que SÍ pertenecen a la línea de educación matemática/estadística + IA: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 50”</li> <li>“Los resúmenes 17 y 19 están duplicados (o muy similares) en contenido. Esto puede deberse a un error en la numeración o en la recopilación.”</li> </ul>	<p>Los siguientes textos no hacen parte de la alineación:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Generación automática de problemas matemáticos en PLN,</li> <li>Análisis bibliométrico de realidad aumentada en educación matemática,</li> <li>Comparación de Digital Game-Based Learning y aprendizaje encarnado</li> <li>Estudio sobre competencia matemática en Olimpiada</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>“Los resúmenes presentados sí pertenecen a la línea solicitada, ya que giran en torno a educación matemática y estadística mediada por IA”.</li> </ul>
Desafíos o limitaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>Precisión y confiabilidad de las herramientas de IA</li> <li>Riesgo de dependencia y superficialidad</li> <li>Necesidad de supervisión humana</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Imprecisiones en las respuestas de IA, falta de fundamentación estadística en algunos casos, y la necesidad de guías pedagógicas para integrar estos recursos en el aula.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Falta de precisión y errores en las respuestas generadas por la IA</li> <li>Limitaciones en la calidad de la orientación y explicaciones</li> <li>Necesidad de formación docente</li> </ul>

Una descripción de los intereses delineados para realizar la comparación entre las diferentes IA se encuentra a continuación:

1. Educación Matemática e Inteligencia Artificial: se abordan temas como la personalización del aprendizaje, uso de herramientas de IA como apoyo docente, promoción de habilidades metacognitivas, transformación educativa mediante IA, accesibilidad, innovación pedagógica, formación docente, y la integración de IA en planificación y generación de material didáctico, así como el impacto en prácticas docentes y motivación estudiantil.
2. Estadística: se enfoca la educación estadística mediada por IA, la incorporación de contenidos estadísticos en evaluaciones y materiales, el uso de IA para enseñar estadística y ciencia de datos y evaluación con apoyo de IA
3. Alineación de los textos: contiene referencias a los resúmenes de trabajos alineados con la temática de educación matemática y estadística con IA, incluyendo una lista de resúmenes considerados válidos, notas sobre duplicados en algunos resúmenes, temas como generación automática de problemas matemáticos, análisis bibliométrico y comparaciones de metodologías educativas.
4. Desafíos o limitaciones: se reportan problemas como la precisión y confiabilidad de las herramientas de IA, riesgos de dependencia o superficialidad, imprecisiones en respuestas, falta de fundamentación estadística, necesidad de supervisión humana, formación docente y guías pedagógicas para integrar la IA en la enseñanza.

Al revisar la Tabla 2 se observa que en los índices 1 y 2, las tres IA respondieron aspectos similares, aunque se destaca que Perplexity presentó respuestas más descriptivas y detalladas. En contraste, en el índice 3, Deepseek y ChatGPT ofrecieron respuestas más concretas y puntuales, mientras que Perplexity fue más general. Finalmente, en el último índice, las respuestas mostraron mayor similitud tanto en la descripción como en el contenido.

Estos aspectos ponen en evidencia una posible brecha en el acceso equitativo a herramientas de calidad. En muchos casos, las versiones gratuitas de las inteligencias artificiales presentan limitaciones en precisión, profundidad y capacidad de interacción, mientras que las versiones de pago ofrecen resultados más confiables, mayor personalización y un acompañamiento más completo en los procesos de aprendizaje. Esto implica que solo quienes pueden costear dichos servicios acceden a una experiencia educativa más enriquecida, lo que podría generar nuevas desigualdades en el ámbito educativo.

## Conclusión

El análisis integrado de las gráficas y estadísticas permite concluir que el conjunto documental se caracteriza por una alta concentración de publicaciones recientes (2024-2025), lo que le otorga un valor significativo en términos de actualidad y pertinencia. Predominan los artículos académicos,

acompañados de una fuerte presencia de palabras clave relacionadas con la educación matemática y la IA, lo cual evidencia un campo de estudio en pleno auge y consolidación.

Asimismo, la diversidad en la autoría refleja tanto una riqueza de perspectivas y aportes como la necesidad de ampliar el espectro analítico hacia una mirada más global. Los resultados muestran que la IA se encuentra cada vez más integrada en la enseñanza de las matemáticas y la estadística, con un énfasis en la personalización del aprendizaje, la accesibilidad, la innovación y la evaluación mediada por tecnología. En este sentido, se destaca un apoyo explícito a los docentes para implementar estas herramientas, lo que ha demostrado un impacto positivo en la motivación y comprensión de los estudiantes a través de estudios empíricos.

No obstante, también se reconocen limitaciones relevantes vinculadas a la precisión de los sistemas, la necesidad de supervisión constante y la formación docente especializada, factores que deben ser considerados para garantizar un uso responsable y efectivo de la inteligencia artificial en los procesos educativos.

## Referencias

- Centeno-Caamal, R., Acuña-Gamboa, L. A., y Peña Estrada, C. C. (2023). Revisión sistemática de modalidades educativas y diseño instruccional en educación a distancia. IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech, 14, e1668. [https://doi.org/10.33010/ie\\_rie\\_rediech.v14i0.1668](https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v14i0.1668)
- Mak, S., y Thomas, A. (2022). Steps for conducting a scoping review. Journal of Graduate Medical Education, 14(5), 565–567. <https://doi.org/10.4300/JGME-D-22-00621.1>
- Petticrew, M., y Roberts, H. (2006). *Systematic reviews in the social sciences: A practical guide*. Blackwell Publishing.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

La inteligencia artificial como herramienta generativa para comprender las emociones en las redes sociales implementando la Teoría de Grafos

PHD. JAKELINE AMPARO VILLOTA ENRÍQUEZ,

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[javillotae@ut.edu.co](mailto:javillotae@ut.edu.co)

PHD (C) DORA ALEXANDRA VILLOTA ENRÍQUEZ

Universidad del Tolima, Ibagué., Colombia.

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil.

[alexhist@hotmail.com](mailto:alexhist@hotmail.com)

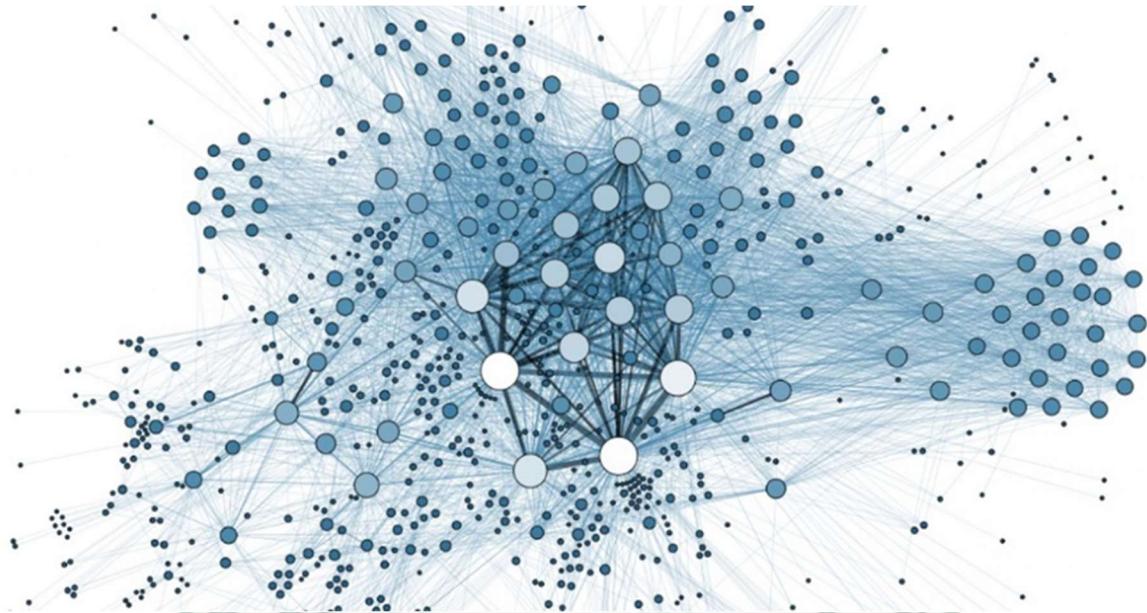
Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

El aumento sobre el uso e implementación de redes sociales como: Facebook, twitter, Instagram, entre otras en la sociedad se ha transformado en la modernidad en el auge de los seres humanos para manifestar sus emociones, sin embargo, su importancia diariamente crece a pasos agigantados por distintas razones ligadas a aspectos emocionales enfocadas en la creación y distribución de información entre personas, la cual conlleva hacer un análisis de las mismas utilizando la inteligencia artificial con el fin de obtener información relevante a través de la Teoría de Grafos para comprender las relaciones sociales que se generan mediante el contacto del dialogo. En términos básicos, una red social se basa en establecer relaciones entre personas donde se pueden generar relaciones entre ellas, creando un grafo de personas unidas por amistad, compañerismo, etc.

Los problemas sociales tienen inmersa planificación de rutas de distribución en donde se encuentran alternativas de solución inmersas en la teoría de grafos ya que facilitan su modelamiento mediante patrones conceptuales que se establecen de las relaciones entre las personas; es decir, los grafos permiten modelar situaciones de la vida cotidiana (Golder & Macy, 2011). Así, los grafos son estructuras discretas que constan de vértices conectados mediante arcos, por lo que, en contraste con las redes sociales, los vértices representan las personas y los conectores pueden ser las relaciones que emergen a partir de las personas, tal como se evidencia a continuación:



Fuente: <https://www.grapheverywhere.com/grafos>

La representación de grafos se puede hacer implementando la inteligencia artificial, especialmente a través de simulaciones (software) que permitan visualizar las conexiones que emergen entre las personas mediante las relaciones ligadas a las redes sociales. En esta dirección, la inteligencia artificial a través de las simulaciones permite efectuar algoritmos (Algoritmo de Dijkstra, Algoritmo de Floyd-Warshall, Algoritmo de Bellman-Ford, Algoritmo de Kruskal, Algoritmo de Prim, Algoritmo de Ford-Fulkerson, entre otros) en torno a los grafos donde se comprende los caminos de los nodos inmersos en una determinada red de flujo (Dumais, Cutrell & Chen, 2018; Kleinberg, 2007).

Palabras claves: Inteligencia Artificial. Emociones. Teoría de Grafos

## Referencias

- [1] Dumais, S. T., Cutrell, E., & Chen, H. (2018). Modeling emotion dynamics in social networks. Proceedings of the ACM on Human-Computer Interaction, \*2\*(CSCW), 1–22. <https://doi.org/10.1145/3274312>
- [2] Golder, S. A., & Macy, M. W. (2011). Diurnal and seasonal mood vary with work, sleep, and daylength across diverse cultures. Science.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

**Propuesta de aprendizaje apoyada en TIC para potenciar el razonamiento cuantitativo en el programa de Tecnología en Gestión Humana Dual de la Universidad Autónoma de Bucaramanga**

**JAIRO GÓMEZ MONCADA**

Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia

e-mail: [jgomez666@unab.edu.co](mailto:jgomez666@unab.edu.co)

**EDDY JOHANA FAJARDO ORTIZ**

Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia

e-mail: [efajardo@unab.edu.co](mailto:efajardo@unab.edu.co)

**LUZZARI RANGEL RUIZ**

Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia. e-mail:

[lrangel583@unab.edu.co](mailto:lrangel583@unab.edu.co)

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## Resumen

Este estudio se centró en aplicar una estrategia de aprendizaje apoyada en las TIC, orientada al fortalecimiento de las competencias en razonamiento cuantitativo de los estudiantes del programa de Tecnología en Gestión Humana Dual, perteneciente a la Universidad Autónoma de Bucaramanga. La implementación se llevó a cabo en la asignatura de Matemática Aplicada, impartida por el Departamento de Ciencias Básicas, durante el primer semestre del año 2024. La investigación adoptó un enfoque cualitativo de tipo fenomenológico, utilizando entrevistas en profundidad como herramienta principal, en conjunto con el modelo ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación), ampliamente empleado en contextos educativos mediados con tecnología (Valdez, 2012). En la fase diagnóstica se exploraron las experiencias previas de los estudiantes con tecnologías educativas, lo que permitió estructurar una estrategia centrada en mejorar la interpretación y el manejo de datos en contextos propios de su formación profesional en concordancia con la perspectiva constructivista que resalta el papel activo del estudiante en entornos mediados por TIC (Reyero, 2018).

Además, el uso de las TIC en el aula también se vincula con los postulados del conectivismo, ya que el aprendizaje se concibe como un proceso de creación y conexión de nodos o fuentes de conocimiento en entornos digitales (Siemens, 2005). Este enfoque favoreció la aplicación de los conocimientos matemáticos a situaciones reales, reforzando

la interacción de las matemáticas y otras áreas de conocimiento, como señala Pollak (1979) en su análisis sobre la naturaleza interdisciplinar de esta ciencia. Durante la implementación, estos factores estuvieron reflejados en el dinamismo de las actividades, en el aprendizaje más contextualizado y en el fomento a la autonomía, lo cual coincide con las recomendaciones de Grisales (2018) quien reporta un impacto positivo del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas.

Al finalizar el proceso, las entrevistas evidenciaron que la incorporación de las TIC favoreció la comprensión de contenidos matemáticos, aumentó la motivación de los estudiantes y promovió una dinámica de aprendizaje colaborativo. En conjunto, los hallazgos reflejaron avances significativos en habilidades para resolver problemas, mayor participación en clase y un incremento en la confianza académica de los estudiantes, lo que reafirma que las TIC constituyen una herramienta clave para el fortalecimiento del razonamiento cuantitativo en la educación superior (Grisales, 2018; Valdez, 2012).

### **Palabras claves**

TIC, Razonamiento Cuantitativo, ADDIE

### **Referencias**

- Grisales, A. M. (2018). Uso de los recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 198-214.
- Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. *New Trends in Mathematics Teaching IV*, UNESCO.
- Reyero, M. (2018). La educación constructivista en la era digital. *Tecnología, Ciencia y Educación*, 12, 111-127.
- Siemens, G. (2005). Connectivism: A learning theory for the digital age. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, 2(1).
- Valdez, F. (2012). Teorías educativas y su relación con las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC). División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM.

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

**Implementación de estrategias pedagógicas en la enseñanza de matemáticas para estudiantes con dificultades auditivas: antecedentes teóricos y prácticos**

**MAGDA LORENA MARTÍNEZ SICACHÁ**

**Filiación: Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, Zona Sur, ORCID,  
Ibagué, Colombia**

**e-mail: [mlmartinezsi@unadvirtual.edu.co](mailto:mlmartinezsi@unadvirtual.edu.co)**

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## **Resumen**

La enseñanza de las matemáticas a estudiantes con situación de discapacidad de origen auditivo representa un desafío pedagógico que requiere una comprensión profunda de sus necesidades comunicativas y cognitivas. Aunque las matemáticas son una disciplina visual y lógica, las barreras comunicativas pueden dificultar la comprensión de conceptos abstractos. Al analizar los antecedentes teóricos y prácticos que han guiado la implementación de diferentes estrategias en la educación inclusiva para estudiantes de esta población, se ha evidenciado desde un enfoque investigativo documental y cualitativo el reconocimiento como un grupo cultural distinto que tiene su propia identidad, siendo la lengua de señas su forma de comunicación natural.

Ainscow y Miles (2008, como se citó en Cobeñas y colaboradores, 2021) afirman que la educación inclusiva no se limita a un tema menor acerca de la integración de algunos alumnos en la educación convencional: examina cómo modificar los sistemas educativos y otros espacios de aprendizaje para que puedan atender a la diversidad, subraya la necesidad de un cambio en los sistemas escolares y alerta sobre las fuerzas excluyentes que afectan a todos los estudiantes en situación de vulnerabilidad. Desde los principios establecidos por la Ley General de Educación 115 de 1994, Artículo 10 de la Ley 115, Resolución 5274 de marzo de 2017, Decreto 1421 de 2017 y Ley 2216 de 2022, se busca asegurar una educación justa, accesible y ajustada a las necesidades de todos los niños y jóvenes en su proceso de escolaridad. En esta propuesta se analiza y reflexiona sobre el estado del arte sobre algunos estudios previos, tanto teóricos como prácticos, que han sido eficaces en la implementación de diferentes estrategias de inclusión en niños y jóvenes en situación de discapacidad de origen auditivo. Ciertamente, esta es una brecha de aprendizaje a la que se enfrentan los alumnos que tienen discapacidad auditiva, especialmente en el estudio de objetos matemáticos en la básica primaria, secundaria y bachillerato, donde suelen ser cada vez más abstractos.

Citados por Cochlear (2020) afirman en el Boletín del Observador Social de la Población Sorda en Colombia, publicado por el Instituto Nacional para Sordos de Colombia, el 2% de los niños menores de cinco años presentan algún tipo de discapacidad auditiva y un estudio del Ministerio de Salud Señala que en el país “la prevalencia estimada de la discapacidad auditiva es de 1.3%; la tasa de prevalencia fue de 12.7 por cada 1.000 habitantes, el 81.6% de las personas con discapacidad auditiva presenta pérdida auditiva parcial, el 18.4% presenta pérdida total y se presentan 3 casos de hipoacusia congénita por cada 1000 recién nacidos vivos” (2020); donde aproximadamente más de 7.000 pertenecían a instituciones públicas en el país. Agregando a esta problemática las dificultades socioculturales, económicas, acceso limitado a capacitación continua a los docentes y directivos de las diferentes instituciones educativas frente al manejo y acompañamiento en la educación inclusiva y especialmente en el conocimiento de la Lengua de señas o herramientas tecnológicas que permitan brindar una educación inclusiva y de calidad.

### Palabras clave

Aprendizaje matemático, accesibilidad educativa, diversidad cultural, educación inclusiva, lengua de señas.

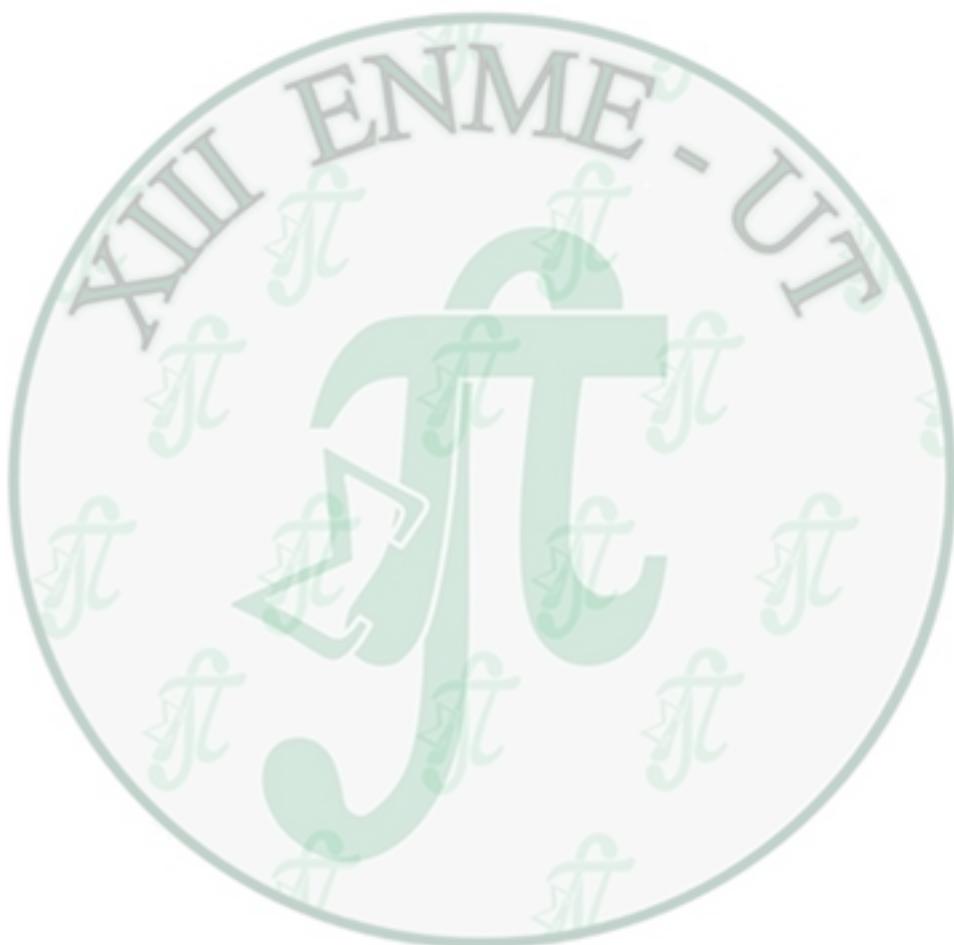
### Referencias

- [1] Cochlear. (2020). *¿Cómo está la salud auditiva de los niños en Colombia?* [Blog].<https://escucharahoraysiempre.com/blog2/salud-auditiva-ninos-colombia/P>.
- [2] Cobeñas, V. Grimaldi, C. Broitman, I. Sancha y M. Escobar (Coords.) (2021). *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad.* La Plata: EDULP. En *Memoria Académica.* Disponible en: <http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/libros/pm.4590/pm.4590.pdf>
- [3] H. Palencia. (2024). *Estadísticas de población con discapacidad auditiva*<https://bionicshearing.com.co/blogs/noticias/estadisticas-de-poblacion-con-discapacidad-auditiva>
- [4] INSOR Educativo Colombia. (17 de septiembre de 2018). *Enseñanza de las matemáticas a estudiantes sordos\_lengua de señas colombiana\_Asesoría.* [Archivo de video]. Youtube. [https://www.youtube.com/watch?v=tMDxWJCD03c&t=17s&ab\\_channel=InsorEducativoColombia](https://www.youtube.com/watch?v=tMDxWJCD03c&t=17s&ab_channel=InsorEducativoColombia)
- [5] D. Rodríguez, L. Correa, C. Nunziata y E Cobos. (2023). *Implementación de las políticas de inclusión en las universidades y colegios de la ciudad de Bogotá y Bucaramanga durante el año*

2022.<https://repository.universidadean.edu.co/server/api/core/bitstreams/51bd3cab-7bb0-48c8-8bc8-e3cb7b62efab/content>

[6] UNESCO (2009). Directrices sobre políticas de inclusión en la Educación. Pág. 18-21. [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000177849\\_spa](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000177849_spa)

[7] Ministerio de Educación. (2017). *Resolución 05274 del 21 marzo 2017 Reconocimiento oficial de intérpretes de la Lengua de señas colombiana – español.* [https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-360342\\_recurso\\_1.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-360342_recurso_1.pdf)



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Fortalecimiento de la transposición semiótica en la enseñanza de los números decimales mediante un Objeto Virtual de Aprendizaje

©MED. LILIANA MERCEDES GUERRERO LASSO

Filiación: Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, Pasto, Colombia  
e-mail: lmguerrerola@unad.edu.co - limerguelas@gmail.com

©MED. ALFREDO IMER RODRÍGUEZ MORA

Filiación: Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, Pasto, Colombia  
e-mail: airodriguezmo@unad.edu.co - incoldes@gmail.com

PhD. LUIS CARLOS ROJAS FLOREZ

Filiación: Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, Bogotá, Colombia  
e-mail: luis.rojasf@unad.edu.co

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

La investigación se enfoca en un contexto escolar que se caracteriza por el mantenimiento de un conjunto de dificultades conceptuales, que son significativas en los procesos evaluativos, en cuyo marco aprenden estudiantes de grado octavo, de la Institución Educativa Técnico El Espino, en el municipio Sapuyes (Nariño). En pruebas realizadas previamente, se ha encontrado una inadecuada ubicación de la coma decimal, problemas con el valor posicional, la comprensión del valor posicional y la aplicación de operaciones de suma, resta, multiplicación y división relacionado con ejemplos del entorno cotidiano. A partir de esta problemática, el objetivo de la investigación es construir una estrategia didáctica que contribuya a la transposición semiótica e interpretación de representaciones aditivas y multiplicación de números racionales en su representación decimal. Con el fin de lograrlo, se utilizó un enfoque metodológico cualitativo de naturaleza estudio de caso instrumental, organizadas a partir del modelo ADDIE. Se identificaron las dificultades a partir de encuestas, de entrevistas, así como por observación, y se creó el OVA "*Mundo Matemático: Operaciones Básicas con Decimales*". Como producto, el 81 % de estudiantes logró mejorar con acierto en las operaciones con decimales al aplicarse este medio, dado que inicialmente se lograba acertar solo un 3 %.

La inclusión del OVA facilitó el desarrollo del pensamiento matemático al integrar el uso de diferentes registros representacionales que facilitaron la construcción de sentido y la comprensión conceptual. La transposición semiótica, entendida como la movilización entre registros simbólicos, gráficos, verbales y numéricos, facilitó una interpretación más

precisa de los problemas, particularmente en situaciones ordinarias como descuentos y regiones, como afirma Duval [1]. El recurso también provocó el compromiso activo y la reflexión metacognitiva al proporcionar contenidos visuales, simbólicos y auditivos que facilitaron la regulación del aprendizaje, como afirma Mayer [2]. El diseño instruccional, flexible y reutilizable, permitió atender las diferentes necesidades del aula, característica relacionada con el recurso educativo, como afirma Bravo [3]. Además, también se identificaron ventajas en cuanto a aspectos motivacionales y de claridad estructural, así como una segmentación adecuada y elementos coherentes, tal y como afirma Castañeda [4] para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde el enfoque multimedia, el OVA respondió a los requerimientos de coherencia y segmentación efectiva propuestos por Clark y Mayer [5], lo que facilitó la retención y transferencia de conocimientos. Finalmente, el análisis del recurso digital con el modelo Lori reveló un fuerte énfasis en la alineación pedagógica, la motivación y también en los aspectos de diseño, aunque todavía existen limitaciones técnicas, que también son discutidas en experiencias anteriores por Domínguez y Sánchez [6].

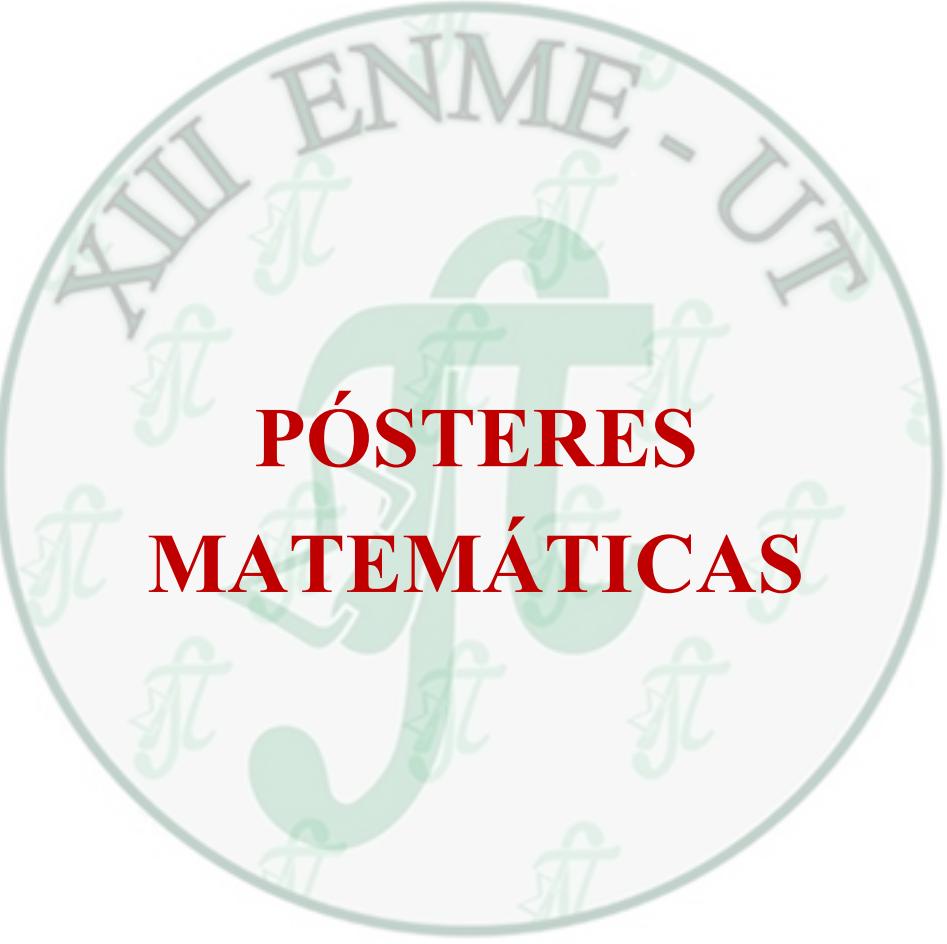
## Palabras clave

Didáctica de las Matemáticas, Números Decimales, Objetos Virtuales de Aprendizaje, Representación Semiótica, Transposición Semiótica.

## Referencias

- [1] R. Duval, “Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento,” en *La Matemática y su Didáctica*, vol. 16, no. 1, pp. 1–27, 1993.
- [2] R. E. Mayer, *Multimedia Learning*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [3] J. Bravo, “Diseño y evaluación de recursos digitales para el aprendizaje matemático,” *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. 21, no. 3, pp. 85–101, 2016.
- [4] L. Castañeda, “Debates sobre tecnología y educación: Caminos contemporáneos y conversaciones pendientes,” *RIED: Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, vol. 22, no. 1, pp. 29–39, 2019. [En línea]. Disponible en: <https://doi.org/10.5944/ried.22.1.23020>
- [5] R. C. Clark y R. E. Mayer, *E-learning and the Science of Instruction: Proven Guidelines for Consumers and Designers of Multimedia Learning*, 4th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2016.
- [6] R. Domínguez y J. Sánchez, “El uso de material interactivo para la mejora del aprendizaje en matemáticas,” *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, vol. 12, no. 1, pp. 94–107, 2018.

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA



**PÓSTERES  
MATEMÁTICAS**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Álgebra de Clifford y Cálculo geométrico

Miguel Ángel Rendón Espinosa

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia  
e-mail: mrendone@ut.edu.co

Félix Nieto Cacais

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia  
e-mail: fnietoc@ut.edu.co

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Esta comunicación seguirá el camino de exposición de Vaz y Rocha [1] para llegar a la definición de álgebra de Clifford, pasando por el espacio vectorial, el espacio dual, el álgebra tensorial y las álgebras de Grassmann hasta llegar a la definición de álgebra de Clifford Universal como cociente de un álgebra tensorial. Para finalmente mostrar que los elementos de una álgebra de Clifford, llamados multivectores, se pueden derivar e integrar, dándole forma y base a lo que se conoce como cálculo geométrico [2].

## Palabras clave

Algebras de Clifford, Algebra geométrica, Cálculo geométrico

## Referencias

[1] Vaz Jr, J., & da Rocha Jr, R. (2016). *An introduction to Clifford algebras and spinors*. Oxford University Press.

[2] Hestenes, D., & Sobczyk, G. (2012). *Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Ciclos Límite Bifurcando de un Toro Isócrono en $\mathbb{R}^3$

VALERIA MONTAÑO MORENO

Filiación: Universidad Distrital Francisco José de Caldas,  
Bogotá D.C, Colombia.

e-mail: [vmontanom@udistrital.edu.co](mailto:vmontanom@udistrital.edu.co)

OSCAR ALEXANDER RAMÍREZ CESPEDES

Filiación: Universidad Distrital Francisco José de Caldas,  
Bogotá D.C, Colombia.

e-mail: [osaramirezc@udistrital.edu.co](mailto:osaramirezc@udistrital.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

En este trabajo estudiamos los ciclos límite que bifurcan de la perturbación de sistemas diferenciales autónomos suaves en  $\mathbb{R}^3$  con un toro isócrono de revolución foliado por soluciones periódicas. Más exactamente, consideramos sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) f(x, y, z) - z \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \epsilon P(x, y, z), \\ \dot{y} &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) f(x, y, z) - z \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \epsilon Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= z f(x, y, z) + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right) + \epsilon R(x, y, z),\end{aligned}$$

definidos en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ , donde  $f(x, y, z) = 1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 - z^2$ ,  $\epsilon \approx 0$ , y  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  y  $R(x, y, z)$  son polinomios reales. Como es habitual, el punto denota diferenciación con respecto a la variable  $t$ , para más detalles ver [2].

Para ello, empleamos la teoría de *averaging* de primer orden (para más detalles véase [3] y [1]) y la teoría de Chebyshev para estudiar el número de ciclos límite

que emergen cuando el sistema inicial es perturbado dentro de la clase de sistemas polinomiales. En particular, mostramos que, a lo sumo, 6 ciclos límite pueden bifurcar desde dicho toro cuando la perturbación es cuadrática. Actualmente, estamos investigando la relación entre el orden de la perturbación polinomial y el número de ciclos límite que puede identificar el método.

## Palabras claves

Bifurcación, ciclos límite, método del promedio, órbita periódica.

## Referencias

- [1] James Murdock Jan A. Sanders Ferdinand Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Second. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, NY, 2007, págs. XXIV, 434. ISBN: 978-1-4419-2376-9. DOI: [10.1007/978-0-387-48918-6](https://doi.org/10.1007/978-0-387-48918-6). URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48918-6>.
- [2] Jaume Llibre, Salomón Rebollo-Perdomo y Joan Torregrosa. En: *Advanced Nonlinear Studies* 11.2 (2011), págs. 377-389. DOI: [doi:10.1515/ans-2011-0208](https://doi.org/10.1515/ans-2011-0208). URL: <https://doi.org/10.1515/ans-2011-0208>.
- [3] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Second. Universitext. Translated from the 1985 Dutch original. Springer-Verlag, Berlin, 1996, págs. x+303. ISBN: 3-540-60934-2. DOI: [10.1007/978-3-642-61453-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61453-8). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61453-8>.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Modelado 1D del Cáncer Cerebral con Radioterapia: Una Comparación entre Diferencias Finitas y el Método Espectral Galerkin

FRANCISCO DANIEL ARANGO OSORIO

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[fdarangoo@ut.edu.co](mailto:fdarangoo@ut.edu.co)

HÉCTOR ANDRÉS GRANADA DÍAZ

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[hagranadad@ut.edu.co](mailto:hagranadad@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Se introduce la ecuación de Fisher-Kolmogorov [6] aplicada al fenómeno del crecimiento tumoral o del cáncer cerebral [4, 7, 9–11, 13], tomando en cuenta los valores de los parámetros presentados en [7, 9, 13]. Se resolverá numéricamente la ecuación por el Método de Diferencias Finitas (MDF) [3, 5] y Galerkin [1, 2]. Compararemos los métodos analizando su costo computacional y precisión, incluyendo la evaluación del error mediante una norma compatible. Finalmente, también se realizará un análisis de respuesta de tratamiento o radioterapia para analizar la interacción de la tasa de muerte celular y la tasa de proliferación de las células cancerígenas y sus efectos en el crecimiento tumoral.

### Palabras clave

Cáncer cerebral, Ecuación Fisher - Kolmogorov, Diferencias finitas, Método Galerkin.

## Referencias

- [1] Bartels, Sören. Numerical Methods for Nonlinear Partial Differential Equations. *Springer Series in Computational Mathematics*.
- [2] Boyd, John P. (1989). Chebyshev & Fourier Spectral Methods. *Springer Berlin, Heidelberg*.
- [3] Hussen, Ibrahim; Mebrate, Benyam (2022). Semi Implicit Scheme of Fisher Equation Based on Crank-Nicolson Method and Method of Lagging. *Palestine Journal of Mathematics*, 11(3), 536.
- [4] Jbabdi, S., Mandonnet, E., Duffau, H., et al. (2005). Simulation of anisotropic growth of low-grade gliomas using diffusion tensor imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 54(3), 616-624.
- [5] Kincaid, David Ronald and Cheney, Elliott Ward. (2009). Numerical analysis: mathematics of scientific computing. *American Mathematical Soc.*
- [6] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: I. An Introduction* (3rd ed.). Springer.
- [7] Özügurlu, E. (2015). A note on the numerical approach for the reaction-diffusion problem to model the density of the tumor growth dynamics. *Computers & Mathematics with Applications*, 69(12).
- [8] Reed, M. & Simon, B. (1980). *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis*. Academic Press.
- [9] Rockne, R., Alvord, E. C., Rockhill, J. K., & Swanson, K. R. (2010). A mathematical model for brain tumor response to radiation therapy. *Cancer Research*, 70(15), 1564-1574.
- [10] Stamatakos, G. S., Giatili, S. G. (2017). A Numerical Handling of the Boundary Conditions Imposed by the Skull on an Inhomogeneous Diffusion-Reaction Model of Glioblastoma Invasion Into the Brain: Clinical Validation Aspects. *Cancer informatics*, 16, 1176935116684824.
- [11] Swanson, K. R., Alvord, E. C., & Murray, J. D. (2000). A mathematical modelling tool for predicting survival of individual patients following resection of glioblastoma. *Journal of the Neurological Sciences*, 176(1), 1-10.
- [12] Swanson, K. R., Bridge, C., Murray, J. D., & Alvord, E. C. (2003). Virtual and real brain tumors: using mathematical modeling to quantify glioma growth and invasion. *British Journal of Cancer*, 88(12), 1956-1962.
- [13] Swanson, K. R., Rostomily, R. C., & Alvord, E. C. (2008). Quantifying the role of angiogenesis in malignant progression of gliomas. *Neuro-Oncology*, 10(3), 320-329.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Polinomios de Laguerre multiplicativos

DANIEL GERARDO TOLOSA BAUTISTA

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia  
e-mail: [daniel.tolosa@uptc.edu.co](mailto:daniel.tolosa@uptc.edu.co)

JUAN DAVID PUENTES LOPEZ

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia  
e-mail: [juan.puentes04@uptc.edu.co](mailto:juan.puentes04@uptc.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Los polinomios de Laguerre multiplicativos, denotados por  $\{\tilde{L}_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ , son una familia de polinomios multiplicativos ortogonales con respecto al producto interno multiplicativo, definido por

$$\langle p, q \rangle_{*,\omega} = \int_0^\infty (p(x) \odot q(x))^{\omega(x)dx}, \quad (1)$$

donde  $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$  con  $\alpha > -1$ ;  $p$  y  $q$  son polinomios multiplicativos tales que  $p \odot q = p^{\ln q}$ , y  $\int_0^\infty (\cdot)^{\omega(x)dx}$  denota la integral multiplicativa (ver [1]).

En este póster se expone la relevancia del cálculo multiplicativo y se presentan algunas propiedades fundamentales que satisfacen los polinomios de Laguerre en este contexto. Este trabajo constituye un primer paso hacia el estudio de los polinomios de Laguerre-Sobolev multiplicativos (véanse [2, 3]).

## Palabras claves

Cálculo multiplicativo, Polinomios de Laguerre multiplicativos.

## Referencias

- [1] A. E. Bashirov, E. Mısırlı and A. Özyapıcı, *Multiplicative calculus and its applications*, J. Math. Anal. Appl. 2008, **337**, no. 1, 36–48.
- [2] E. Fuentes y L. E. Garza Gaona (2023). *Coherent pairs and Sobolev-type orthogonal polynomials on the real line: an extension to the matrix case*, J. Math. Anal. Appl. **518**, no. 1, Paper No. 126674, 21 pp.
- [3] E. Fuentes; L. E. Garza Gaona y M. L. Saiz Saenz (2024). *Matrix functions approximation using matrix coherent pairs and their associated Sobolev-type orthogonal polynomials* , Submitted.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Solución de la ecuación diferencial fraccionaria conformable de Jacobi

CRISTIAN MIGUEL RICO SALINAS

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia  
e-mail: [cristian.rico03@uptc.edu.co](mailto:cristian.rico03@uptc.edu.co)

MARLON STIVEN MAYORGA BELTRAN

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia  
e-mail: [marlon.mayorga@uptc.edu.co](mailto:marlon.mayorga@uptc.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

Los polinomios de Jacobi fraccionarios conformables surgen como una de las soluciones de la ecuación diferencial de Jacobi conformable de orden  $\alpha \in (0, 1]$ :

$$T_\alpha \left( (1 - x^{2\alpha}) \omega(x, \alpha) T_\alpha(y(x)) \right) + \alpha^2 n(n + \theta + \beta + 1) \omega(x, \alpha) y(x) = 0, \quad x \in [-1, 1],$$

donde  $\omega(x, \alpha) = (1 - x^\alpha)^\theta (1 + x^\alpha)^\beta$  con  $\theta, \beta > -1$ ;  $T_\alpha(\cdot)$  denota la derivada fraccionaria conformable (ver [1, 2]), y  $n$  es un número entero no negativo.

En este póster se destaca la relevancia del cálculo fraccionario conformable y se presenta el método empleado para resolver la ecuación diferencial de Jacobi conformable. Este trabajo representa un primer avance en el estudio de los polinomios de Jacobi fraccionarios conformables.

### Palabras claves

Cálculo conformable, ecuación diferencial fraccionaria conformable de Jacobi.

## Referencias

- [1] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, *J. Comput. Appl. Math.* **279** (2015), 57–66; MR3293309
- [2] R. R. Khalil et al., A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.* **264** (2014), 65–70; MR3164103



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Teorema de la Comparación en Superficies

NICOLAS GIRALDO LIZCANO

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [ngiraldol@ut.edu.co](mailto:ngiraldol@ut.edu.co)

JAVIER EDUARDO VASQUEZ CARTAGENA

Filiación: Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

e-mail: [jevasquezc@ut.edu.co](mailto:jevasquezc@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

En este póster presentaremos una idea del teorema de comparación en superficies de curvatura media constante (CMC), en el contexto de subvariedades de variedades Riemannianas abstractas, utilizando la teoría clásica de la geometría riemanniana.

Comenzaremos formulando una versión del teorema en el plano euclíadiano, aplicándolo a curvas planas. Luego, exploraremos cómo esta construcción se extiende al espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  y, finalmente, desarrollaremos la idea en variedades Riemannianas de dimensión 3 sin espacio ambiente.

## Palabras claves

1. Curvas.
2. Curvatura.
3. Función exponencial.
4. Geometría Diferencial.
5. Geometría Riemanniana.

## Referencias

- [1] Blaschke, W. (1921) Vorlesungen über Differentialgeometrie. *Verlag von Julius Springer*, Berlin.
- [2] Do Carmo, M. P. (2010) Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. *SBM, Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro.
- [3] Do Carmo, M. P. (1976) Differential Geometry of Curves and Surfaces. *SBM, Prentice-Hall*, New Jersey.
- [4] Do Carmo, M. P. (2015) Geometria Riemanniana. *IMPA, Instituti Nacinal De Matemática Pura E Aplica*, Brasil.
- [5] Klingenberg, W. (1978) Curso de Geometría diferencial. *Alhambra*, Madrid. Traducción de: (1973) Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. *Springer*, Berlin.
- [6] Laugwitz, D. (1960) Differentialgeometrie. *B. G. Teubner*, Stuttgart.
- [7] O'Neill, I. (1972) Elementos de Geometría Diferencial. *Limusa-Wiley*, México. Traducción de: (1966) Elementary Differential Geometry. *Academic Press*.
- [8] Pogorelov, I. (1954) Differential Geometry. *P. Noordhoff N. V.*, Groningen, The Netherlands. Traducción de Leo F. Boron del original ruso de 1923.
- [9] Stoker, J. J. (1969) Differential Geometry. *Wiley*, New York.
- [10] Struik, D. J. (1950 y 1961) Lectures on Classical Differential Geometry. *Addison-Wesley*, Reading, Massachusetts, USA.
- [11] Solanilla, L. (2008) Geometría diferencial de superficies. *Sello Editorial Universidad de Medellín*, Medellín.
- [12] Pérez, (2014) Curvas y Superficies. *Sello Editorial Universidad de Granada*, Granada.
- [13] M. Lee, (1997) Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature. *Springer*, New York.
- [14] Josué, (2023) Geometria Riemanniana. *Universidade Federal de Minas Gerais*, Belo Horizonte.
- [15] Pérez, (2014) Superficies mínimas y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ . *Universidad de Granada*, Granada.

XIII ENCUENTRO NACIONAL DE  
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA



**PÓSTERES  
ESTADÍSTICA**

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Análisis de la Contaminación Ambiental en Bogotá como función del Crecimiento Poblacional y Económico

EDWIN ALEXANDER DUCUARA OVIEDO

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[eaducuarao@ut.edu.co](mailto:eaducuarao@ut.edu.co)

HÉCTOR ANDRÉS GRANADA DÍAZ

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[hagranada@ut.edu.co](mailto:hagranada@ut.edu.co)

ALFONSO SÁNCHEZ HERNÁNDEZ

Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[asanchez@ut.edu.co](mailto:asanchez@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

El siguiente trabajo pretende estudiar la contaminación ambiental en la ciudad de Bogotá, basado en datos demográficos, económicos del DANE [1] y de SaluData [2] (2005-2023). Se emplea Levenberg-Marquardt [3] para estimar parámetros, la dinámica poblacional  $P(t)$  se asume como un modelo Malthusiano [4], se establecen algunos supuestos sobre las tasas de ahorro y depreciación que permiten estimar el Acervo de Capital  $K(t)$ , usando teoría de Solow [5] y, los parámetros de la función de producción  $Y(t)$  de tipo Cobb Douglas [6]. La serie de contaminación ambiental  $C(t)$  se propone como función normalizada del AQI [7] y se establece la correlación con las variables. La evolución de las variables se plantea como un problema de valor inicial que se resuelve por métodos Runge-Kutta [8] y se comparan las soluciones con las series de datos. Finalmente, se analizan los diagramas de fase de las variables respecto a la contaminación.

## Palabras clave

Cobb Douglas, Modelo de Solow, Modelo Malthusiano, Runge - Kutta, Levenberg - Marquardt.

## Referencias

- [1] Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). (2025). *Producto Interno Bruto por departamento 2005-2023pr*. Recuperado de <https://www.dane.gov.co/files/operaciones/PIB/anex-PIBDep-TotalDep-2023pr.xlsx>
- [2] Observatorio de Salud de Bogotá (SaluData). (2025). *Población de Bogotá D.C. 2005-2035*. Recuperado de <https://saludata.saludcapital.gov.co/osb/indicadores/poblacion-de-bogota-d-c-2005-2035/>
- [3] MathWorks. (2025). *Least-Squares (Model Fitting) Algorithms*. Incluye el uso del algoritmo de Levenberg-Marquardt mediante la función `lsqcurvefit`. Recuperado de <https://la.mathworks.com/help/optim/ug/least-squares-model-fitting-algorithms.html>
- [4] Martín Sánchez, J. M. (2010). Análisis y modelización matemática de la dinámica poblacional, con énfasis en el modelo malthusiano. *Anales de la UNED - Ciencias Políticas y Sociología*, 23, 1-20. Recuperado de <http://www.calatayud.uned.es/web/actividades/revista-anales/23/3-8-MartinSanchez.pdf>
- [5] Torres Carvajal, A. M., & Ruiz Ángel, C. (2015). Crecimiento económico y desarrollo: una revisión de la teoría de Solow. *Revista Científica Ciencias Administrativas y Contables*, 8(2), 99-117. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/1650/165013658001.pdf>
- [6] Sancho, F. (2011). La función de producción Cobb-Douglas: análisis y aplicaciones. *Revista de Economía Aplicada*, 19(56), 31-48. Recuperado de <https://www.uv.es/sancho/funcion%20cobb%20douglas.pdf>
- [7] AQI. (2025). *Dashboard de calidad del aire en Bogotá, Colombia*. Recuperado de <https://www.aqi.in/es/dashboard/colombia/bogota/bogota?cr=1748548812575>
- [8] Canek Sánchez, E. (2018). Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales: énfasis en Runge-Kutta. Recuperado de <http://canek.uam.mx/Ecuaciones/Teoria/7.MetodosNumericos/ImpRungeKutta.pdf>

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

**Determinantes del desempeño académico en el Tolima: Evidencias desde los datos  
de las pruebas Saber 11°, 2024**

**German Hernando Pava Villarreal**  
**Edith Johana Medina Hernández**

**Filiación: Grupo de Investigación en Análisis Estadístico (GINVAE-UT)**

**Universidad del Tolima**

**e-mails: [ghpavav@ut.edu.co](mailto:ghpavav@ut.edu.co), [ejmedinah@ut.edu.co](mailto:ejmedinah@ut.edu.co)**

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## **Resumen**

En este análisis se utilizan los microdatos de las Pruebas Saber 11° del año 2024 para identificar cómo los factores socioeconómicos y demográficos influyen en el desempeño académico de los estudiantes tolimenses. Mediante las técnicas multivariantes Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM) y Análisis de Clúster, se exploran patrones de asociación entre variables como estrato, sector educativo, zona de residencia, acceso a Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), y puntajes de las pruebas.

Se propone este estudio exploratorio dado que el rendimiento académico en Colombia refleja disparidades relacionadas con el nivel socioeconómico de la población estudiantil, el tipo de institución educativa a la que asisten y su contexto territorial. Además, porque específicamente el departamento del Tolima presenta puntajes de calidad educativa por debajo de la media nacional, y enfrenta desafíos particulares como la ruralidad, la brecha digital y limitaciones en el acceso a recursos educativos.

El enfoque metodológico de este estudio aplicado es cuantitativo, exploratorio y correlacional, buscando hacer énfasis en la caracterización de perfiles estudiantiles y su vinculación con contextos de vulnerabilidad. Por ello, a través de los resultados se genera evidencia empírica útil para la formulación de políticas públicas focalizadas en las estrategias educativas del departamento, que contribuyan a mitigar las desigualdades educativas observadas.

Este análisis se justifica porque diversos estudios han evidenciado que el nivel socioeconómico y el acceso a infraestructura tecnológica son determinantes en el desempeño académico de los estudiantes [1], [2], [3]. Asimismo, el uso de técnicas estadísticas, como el análisis de clúster, permite segmentar la población estudiantil y orientar intervenciones diferenciadas con base en sus condiciones y necesidades [4], [5]. En este sentido, las técnicas multivariantes han demostrado ser herramientas útiles para explorar patrones categóricos en contextos educativos complejos [6], lo que refuerza la

pertinencia metodológica del análisis para aportar evidencia empírica sobre las desigualdades educativas en el Tolima.

## Palabras clave

Tolima, desempeño académico, pruebas saber 11°, estadística aplicada.

## Referencias

- [1] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación – ICFES, *¿Cómo se construye el Índice de Nivel Socioeconómico (INSE) en el contexto de las pruebas Saber?*, Bogotá: ICFES, 2019. [En línea]. Disponible en: <https://www.icfes.gov.co/wp-content/uploads/2024/11/Edicion-4-boletin-saber-al-detalle-.pdf>
- [2] Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones – MinTIC, *Índice de Brecha Digital 2023*, MinTIC, 2024. [En línea]. Disponible en: [https://colombiatic.mintic.gov.co/679/articles-396961\\_recurso\\_1.pdf](https://colombiatic.mintic.gov.co/679/articles-396961_recurso_1.pdf)
- [3] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación – ICFES, *Informe nacional de resultados del examen Saber 11 - 2023*, Bogotá: ICFES, 2024. [En línea]. Disponible en: [https://www.icfes.gov.co/wp-content/uploads/2025/04/Informe\\_Saber11\\_2023.pdf](https://www.icfes.gov.co/wp-content/uploads/2025/04/Informe_Saber11_2023.pdf)
- [4] C. Hennig, M. Meila, F. Murtagh y R. Rocci (Eds.), *Handbook of Cluster Analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2015. <https://doi.org/10.1201/b19706>
- [5] M. Álvarez, R. Ibar y M. Arenas, “A comprehensive framework for explainable cluster analysis,” *Information Sciences*, vol. 663, art. 120282, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.120282>
- [6] R. Nisbet, G. D. Miner y K. McCormick, *Handbook of Statistical Analysis: AI and ML Applications*, 3<sup>a</sup> ed., Elsevier, 2024. <https://shop.elsevier.com/books/handbook-of-statistical-analysis/nisbet/978-0-443-15845-2>

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Póster:

**Estudio exploratorio del desempeño académico en las pruebas Saber 11 en el Departamento del Tolima (2020-2023): Identificación de áreas clave para el fortalecimiento educativo**

**Angela Pantoja Eraso**

Universidad Del Tolima,

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[acpantojae@ut.edu.co](mailto:acpantojae@ut.edu.co)

**Julie Kimberly Ramirez Briñez**

Universidad del Tolima

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[jkramirezb@ut.edu.co](mailto:jkramirezb@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Este estudio, desarrollado en el marco de un semillero de investigación, presenta un análisis exploratorio del desempeño académico en las pruebas Saber 11 en el departamento del Tolima, con el propósito de identificar áreas prioritarias para el fortalecimiento educativo regional. Utilizando datos públicos del ICFES disponibles a través del portal de Datos Abiertos del gobierno colombiano, se recopilaron y procesaron registros correspondientes a los últimos cuatro años. La metodología incluyó la limpieza, filtrado y análisis de los datos exclusivamente del Tolima, organizándolos en tablas y gráficos que permiten observar la evolución del desempeño académico por área evaluada y por municipio. El estudio busca responder preguntas clave como: ¿Qué municipios han mostrado mejoras sostenidas en alguna de las áreas evaluadas?, ¿en qué áreas se han registrado retrocesos o estancamiento?, y ¿existen diferencias marcadas entre municipios urbanos y rurales? Los resultados preliminares ofrecen insumos valiosos para la formulación de estrategias educativas basadas en evidencia, dirigidas al cierre de brechas territoriales y al fortalecimiento de las competencias evaluadas en las pruebas Saber 11.

## **Palabras clave:**

Análisis exploratorio de datos, Datos abiertos, Educación en el Tolima, Evaluación educativa, Pruebas saber 11.

## **Referencias**

- [1] Espinoza Rodríguez, E. E., Carrascal Contreras, C. A., & Cabrera Castro, Y. M. (2024). *Análisis de los resultados de las pruebas Saber 11 en el departamento del Tolima*. Universidad del Magdalena. <https://repositorio.unimagdalena.edu.co/handle/123456789/21119>
- [2] Giraldo Salguero, I. A., & Pérez Agamez, R. A. (2024). Exploración del rendimiento académico y evaluación de las Pruebas Saber 11° mediante técnicas estadísticas multivariadas (TEM). *Perspectivas*, 9(24), 58–70. <https://revistas.uniminuto.edu/index.php/Pers/article/view/3732>
- [3] Google. (s.f.). ¿Cuáles son las áreas evaluadas por el ICFES? *Resultados de búsqueda*. <https://www.google.com/search?q=cuales+son+las+areas+evaluadas+por+el+icfes>
- [4] ICFES. (s.f.). *Pruebas Saber 11 – Información general*. Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. <https://www.icfes.gov.co/web/guest/examen-saber-11>
- [5] OpenAI. (2024). *Asistencia en la formulación de proyecto de investigación con enfoque en análisis de datos del ICFES*.
- [6] Wikipedia. (s.f.). *Anexo: Municipios de Tolima*. Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Municipios\\_de\\_Tolima](https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Municipios_de_Tolima)

## XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Evaluación Espaciotemporal de Incendios Forestales y Recuperación de  
Bosques Nativos en la Región de Ñuble (Chile)

IVÁN RIQUELME  
Universidad de Valparaíso, Valparaíso, Chile

DAIRA VELANDIA MUÑOZ  
Universidad de Valparaíso, Valparaíso, Chile.  
e.mail: [daira.velandia@uv.cl](mailto:daira.velandia@uv.cl)

Ibagué, Colombia  
Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

El cambio climático y la actividad humana han reducido la cobertura de bosques nativos y aumentado la frecuencia e intensidad de incendios a nivel global. En Chile, estos incendios se concentran en la zona central, dentro del Hotspot de biodiversidad “Chilean Winter Rainfall-Valdivian Forests”, y son mayormente causados por el ser humano. Desde 2010, una megasequía ha intensificado estos eventos, afectando la biodiversidad, el microbiota del suelo y el funcionamiento de los ecosistemas. Los bosques quemados pueden recuperarse naturalmente o mediante restauración, aunque también pueden ser reemplazados por agricultura, plantaciones o zonas urbanas. La Región de Ñuble, carece de registros históricos propios debido a su reciente creación administrativa. Para evaluar la recuperación de los bosques post-incendio se realizaron análisis geo espaciotemporales utilizando información satelital, geoestadística y Machine Learning desde 1986 a la fecha. Los resultados indican que las comunas del norte de la región son las que tienen mayor probabilidad de quemarse. Los incendios suelen repetirse en los mismos sitios y son de alta severidad. Análisis preliminares muestran que la recuperación de los bosques depende en parte de interacción con humanos, los sitios usados para pastoreo, o en los que se ha hecho remoción de tocones, el bosque ha sido reemplazado por pastizales o formaciones vegetales de árboles introducidos. La integración de esta información en la plataforma PLANSAT, facilitará la visualización de los incendios, lo que esperamos haga más fácil identificar zonas prioritarias para conservación haciendo más expedita la toma de decisiones sobre restauración y uso de bosques nativos.

### Palabras claves

Modelado espaciotemporal, Incendios forestales, Recuperación ecológica, Aprendizaje automático

## Referencias

Bivand, R., Pebesma, E., y Gómez-Rubio, V. (2013). *Applied Spatial Data Analysis with R*. Springer.

Garreaud, R., Alvarez-Garreton, C., Boisier, J. P., et al. (2017). The 2010–2015 megadrought in central Chile: Impacts on regional hydroclimate and vegetation. *Hydrology and Earth System Sciences*, **21**, 6307–6327.

González, M. E., Gómez-González, S., Lara, A., Garreaud, R., y Díaz-Hormazábal, I. (2018). The 2017 mega fire in Central Chile: Background and perspectives. *Forest Ecology and Management*, **424**, 1–9.

Análisis de los incendios de 2017 en Chile, muy pertinente para la región de Ñuble.

Urrutia-Jalabert, R., González, M. E., González-Reyes, Á., Lara, A., y Garreaud, R. (2018). Climate–vegetation–fire interactions and their implications for the dynamics of temperate forests in central Chile. *Forest Ecology and Management*, **424**, 4–14.

Velandia, D., Pozo, D., Vargas, B., & Sigel, P. (2023). Spatio-temporal analysis of drought variability in Chile. *Proceedings of the International Conference on Data Science (ICDS 2023)*.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Comunicación:

Introducción al *Machine Learning* con el lenguaje R: una experiencia en semillero de investigación con datos abiertos forestales.

**Sergio Andrés Quiñones Monad**

Universidad del Tolima

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[squinonesm@ut.edu.co](mailto:squinonesm@ut.edu.co)

**Diego Andrés Méndez Capera**

Universidad del Tolima

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[damendezc@ut.edu.co](mailto:damendezc@ut.edu.co)

**Julie Kimberly Ramírez Briñez**

Universidad del Tolima

Semillero de Investigación RP::DATUM

Ibagué, Colombia

[jkramirezb@ut.edu.co](mailto:jkramirezb@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

Este estudio se desarrolla en el marco de un semillero de investigación, con el objetivo de introducir a los estudiantes en los fundamentos del machine learning utilizando el lenguaje de programación R. La investigación emplea datos abiertos, enfocados específicamente en variables ambientales, forestales y ecológicas, lo que permite contextualizar los modelos dentro de problemáticas reales del sector forestal.

Se exploran de manera introductoria diversas técnicas de aprendizaje automático supervisado, iniciando con métodos de clasificación mediante vecinos más cercanos (k-NN), enfoques de aprendizaje probabilístico, implementando algoritmos como Naive Bayes y modelos de clasificación basados en árboles de decisión.

Todos los algoritmos son implementados en R, permitiendo una experiencia formativa integral, desde la preparación de los datos hasta la evaluación y visualización de los resultados. El uso de R no solo facilita el aprendizaje de técnicas estadísticas y

computacionales, sino que también promueve la reproducibilidad científica y el manejo ético de datos.

## Palabras clave

Aprendizaje supervisado, Clasificación, Datos abiertos, Ingeniería forestal, R.

## Referencias

- [1] Cover, Thomas M.; Hart, Peter E. (1967). Nearest neighbor pattern classification, *IEEE Transactions on Information Theory*, 13(1), 21–27 pp.
- [2] Gobierno de Colombia (2024). *Portal de Datos Abiertos de Colombia*. Datos abiertos para el desarrollo y la innovación. Disponible en: <https://www.datos.gov.co/>
- [3] Kaggle Inc. (2024). *Kaggle: Your Machine Learning and Data Science Community*. Disponible en: <https://www.kaggle.com/>
- [4] Lantz, Brett (2019). *Machine Learning with R: Expert techniques for predictive modeling*. 3rd ed., Packt Publishing, 456 pp.
- [5] Mitchell, Tom M. (1997). *Machine Learning*, McGraw-Hill, 414 pp.

# **XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

**Modelos de Clasificación en Minería de Datos: Aplicación a datos de Olimpiadas Regionales Matemáticas-UT**

**GISOU DÍAZ ROJO**

**Universidad del Tolima, Ibagué Colombia**

**e-mail: gdiazrj@ut.edu.co**

**ADRIANA DEL PILAR SANCHEZ RAMIREZ**

**Estudiante de la Universidad del Tolima, Ibagué Colombia**

**e-mail: adsanchezra@ut.edu.co**

**NIDIA YADIRA CAICEDO BRAVO**

**Universidad del Tolima, Ibagué Colombia**

**e-mail: nycaicedob@ut.edu.co**

**Ibagué, Colombia**

**Septiembre 3, 4 y 5 de 2025**

## **Resumen**

La clasificación es una de las tareas fundamentales en la minería de datos, especialmente cuando la variable de respuesta es categórica. El objetivo de los métodos de clasificación es construir un modelo capaz de predecir la clase de nuevos datos a partir de un conjunto de entrenamiento previamente etiquetado. Entre los métodos más empleados se encuentran: Árboles de decisión (como ID3, C4.5 o CART, que segmentan el espacio de atributos mediante reglas fácilmente interpretables); Máquinas de Soporte Vectorial (que maximizan el margen entre clases en un espacio transformado mediante funciones kernel), Véncino más próximo (que clasifican una nueva instancia según la mayoría de sus vecinos más próximos en el espacio de características), Naive Bayes (un clasificador probabilístico basado en el teorema de Bayes) y Redes Neuronales (que capturan relaciones complejas no lineales mediante capas de nodos y funciones de activación). En este trabajo se presenta una breve descripción de estos métodos de aprendizaje supervisado, sus características y algunas dificultades que se pueden presentar en su implementación. Además, se explora el uso de estos métodos en datos del proyecto Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad del Tolima utilizando el software R.

## **Palabras clave**

Minería de datos, aprendizaje supervisado, modelos de clasificación, olimpiadas matemáticas.

## **Referencias**

A. Liaw and M. Wiener (2002). Classification and Regression by random Forest. R

News 2(3), 18-22.

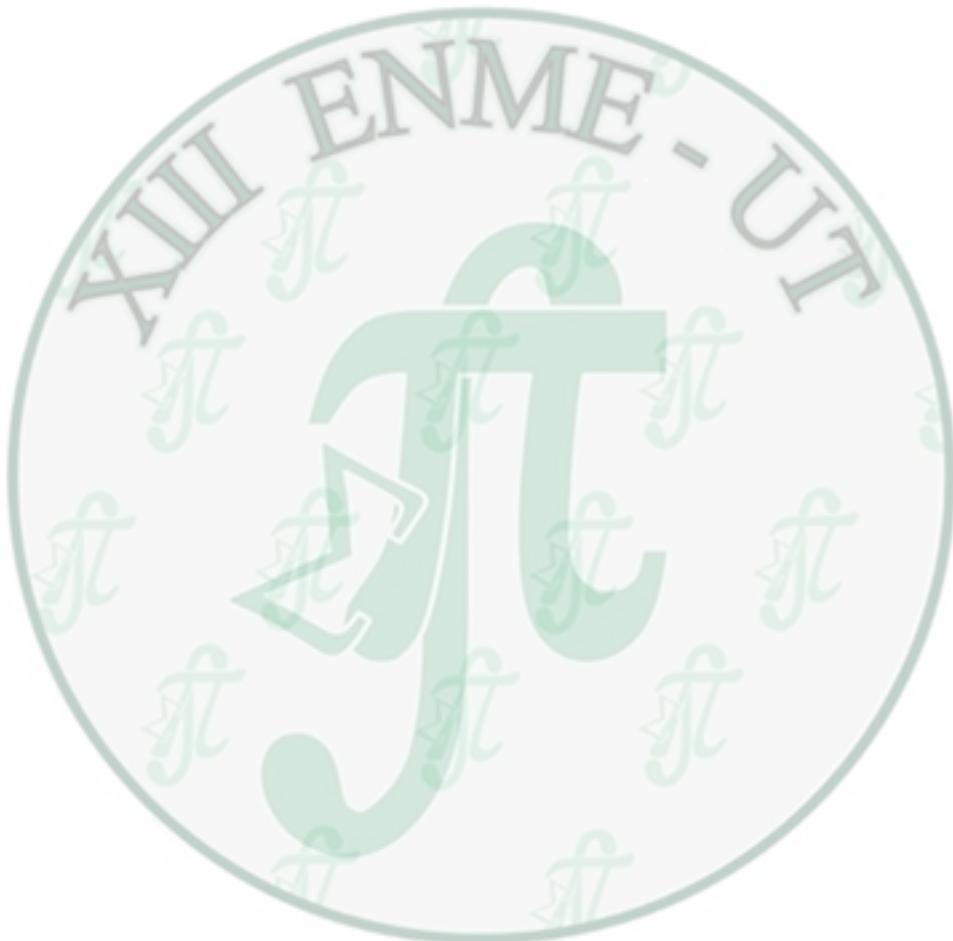
Han, J., Kamber, M., & Pei, J. (2012). *Data Mining: Concepts and Techniques* (3rd ed.), Morgan Kaufmann.

Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J., & Franklin, J. (2005). The elements of statistical learning: data mining, inference and prediction. *The Mathematical Intelligencer*, 27(2), 83-85.

Haykin, S. (2009). *Neural Networks and Learning Machines* (3rd ed.). Prentice Hall.

Hornik, K., Meyer, D., & Karatzoglou, A. (2006). Support vector machines in R. *Journal of statistical software*, 15(9), 1-28.

Quinlan, J. R. (1993). *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kaufmann.



## XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Pandemia e Incidencia académica en los programas de pregrado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales periodo 2020-2022

DAVID SANTIAGO ANDRADE GÓMEZ

Universidad Surcolombiana, Neiva-Huila, Colombia

u20191179090@usco.edu.co

JAIME POLANÍA PERDOMO

Universidad Surcolombiana, Neiva-Huila, Colombia

jpolania@usco.edu.co

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

En la presente investigación se analizó el impacto de la pandemia por Covid-19 en los procesos de enseñanza-aprendizaje en los programas de Matemática Aplicada, Biología Aplicada y Física de la Facultad de ciencias exactas y naturales en la Universidad Surcolombiana durante el periodo 2020-2022. Se identificaron afectaciones significativas en el desarrollo de habilidades prácticas, la motivación estudiantil y la interacción docente-estudiante, debido a la implementación de clases virtuales como medida principal de continuidad académica.

Los resultados evidenciaron limitaciones en el acceso a recursos tecnológicos, lo que profundizó las desigualdades educativas y generó dificultades en el rendimiento académico. A pesar de que se distribuyeron tabletas y planes de datos, estos esfuerzos no lograron cubrir totalmente las necesidades de la población estudiantil más vulnerable. Desde el rol docente, se observaron retos en la adaptación a plataformas virtuales y en la transformación de metodologías tradicionales, lo que afectó inicialmente la calidad de la enseñanza impartida.

Asimismo, el retorno progresivo a la presencialidad se abordó mediante estrategias híbridas que facilitaron la transición académica y emocional del estudiantado. En conclusión, la pandemia representó un reto significativo para la formación en ciencias exactas y naturales, pero también permitió avances en el fortalecimiento de la competencia digital, el uso de recursos tecnológicos y la consolidación de modelos educativos mixtos, más resilientes ante futuras contingencias.

### Palabras clave:

Pandemia, Problemáticas, Enfoque híbrido, Rendimiento académico, Desigualdad educativa, Adaptabilidad curricular

## Referencias

- Ciencias Exactas y Naturales. (2020). Presentación. Jóvenes de la facultad. Recuperado el 11 de abril de 2022, de <https://www.usco.edu.co/archivosusuarios/21/publicacion/rendicion-decuentas/presentacion-facultad-de-ciencias-exactas-y-naturales.pdf>
- Educación. (2021, 7 de marzo). La pandemia virtualizó: lo bueno y lo malo de esta modalidad. El país. <Https://www.elpais.com.co/educacion/la-pandemia-virtualizo-la-lo-bueno-y-lo-malo-deesta-modalidad.html>
- Facultad de ciencias exactas y naturales. (s.f.). Control interno. Rendición de cuentas. Recuperado el 12 de abril de 2022, de <https://www.usco.edu.co/archivosusuarios/21/publicacion/control-interno/informe%20%20final%20rendicion%20de%20cuentas%202020-2021.pdf>
- Manchola, c. (2020, 14 de mayo). 40% de estudiantes de la USCO, en riesgo de deserción. La nación. <Https://www.lanacion.com.co/40-de-estudiantes-de-la-usco-en-riesgo-de-desercion/>
- Murillo-Vargas, g., y Hoyos-Castañeda, c. H. (2021, 18 de junio). Gestión universitaria en tiempos de pandemia por covid-19: análisis del sector de la educación superior en Colombia. Estudios gerenciales. [https://www.icesi.edu.co/revistas/index.php/estudios\\_gerenciales/article/view/4409/4174](https://www.icesi.edu.co/revistas/index.php/estudios_gerenciales/article/view/4409/4174)
- Observatorio de La Universidad Surcolombiana. (2022). Lo que dejó 2020 de herencia a la educación superior para 2021. Universidad, (5).
- Rodríguez, m. X. (2023, julio). Efectos de la virtualidad en pandemia sobre la actividad académica de los docentes y estudiantes pertenecientes a la carrera de administración de empresas del séptimo semestre en la universidad pública de cúcuta, colombia. <Http://repository.unipiloto.edu.co/bitstream/handle/20.500.12277/12899/propuesta%20de%20investigacion%20docencia%20universitaria.pdf?sequence=1&isallowed=n>
- Solicitud ciencias exactas. (2021, 24 de agosto). Consejo académico, acta 028 de 2021. Universidad Surcolombiana. [https://www.usco.edu.co/archivosusuarios/21/publicacion/consejo\\_academico/acta/acta\\_028\\_de\\_2021.pdf](https://www.usco.edu.co/archivosusuarios/21/publicacion/consejo_academico/acta/acta_028_de_2021.pdf)
- Unesco. (s.f.). Educación superior: recomendaciones en tiempos de covid-19. Recuperado el 12 de abril de 2022, de <https://www.iesalc.unesco.org/wpcontent/uploads/2020/05/covid-19-es-130520.pdf>
- Universidad Surcolombiana. (s.f.). Informe de pandemia: rendición de cuentas rectoría USCO. Recuperado el 11 de abril de 2022, de

<http://www.usco.edu.co/archivosusuarios/21/publicacion/rendicion-de-cuentas/informerendicion-cuentas-rectoria.pdf>

Mosquera, J. A., Cedeño, e. F. A., y Cubillos, D. L. G. (2019). El conocimiento didáctico de contenido en la inserción profesional de una profesora de ciencias naturales. *Paideia Surcolombiana*, 24, 14-39.

Ochoa, d. Y. R. (2019). Los proyectos pedagógicos integradores de áreas, como estrategia para la interdisciplinariedad. *Rastros y rostros del saber*, 3(5), 8-15.

Piraján Español, m. E. (2015). La argumentación en la enseñanza de las ciencias: Análisis interpretativo de las investigaciones recientes. [tesis de maestría]. Universidad pedagógica nacional, Colombia.

Sánchez Oñate, A., Oliva Jara, K., y Reyes Reyes, F. (2024). Una aproximación a la medición de competencias de alfabetización científica en estudiantes de psicología. *Conrado*, 20(99), 131-140.

Weston, Anthony (2006). Las claves de la argumentación. Barcelona: editorial Ariel.

# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

¿Por qué no hacen turismo interno los colombianos?

GISOU DÍAZ ROJO

Universidad del Tolima, Ibagué Colombia

e-mail: gdiazrj@ut.edu.co

YURI MARCELA GARCÍA SAAVEDRA

Universidad del Tolima, Ibagué Colombia

e-mail: ymsaavedrag@ut.edu.co

DEICY VILLALBA REY

Universidad del Tolima, Ibagué Colombia

e-mail: dvillalbar@ut.edu.co

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

## Resumen

La población que no hace turismo interno varía en cada país y se mide como un porcentaje de la población total que no realiza viajes fuera de su entorno habitual, pernoctando por lo menos una noche. En Colombia, durante los últimos años, el porcentaje de la población que no realiza turismo interno se encuentra alrededor del 90%. Según el DANE, con su Encuesta de Gasto Interno en Turismo (EGIT), en el año 2024, el 94,8% de los encuestados reportó no haber realizado turismo interno, lo que representa un aumento de 2,8 puntos porcentuales frente al año 2023. En este trabajo se analizaron las características sociodemográficas de la población colombiana que no realiza turismo interno, así como los principales motivos por los que no hacen turismo interno y sus limitaciones. Se identificaron algunos factores como la falta de recursos económicos, la falta de tiempo, los elevados costos de los servicios y la falta de interés. Los hallazgos encontrados permiten comprender las razones estructurales y culturales que explican la limitada práctica del turismo interno en Colombia, aportando insumos para el diseño de políticas públicas y estrategias empresariales orientadas a democratizar el acceso al ocio y a fortalecer la competitividad del sector turístico nacional.

## Palabras clave

No turismo interno, caracterización de población no turismo, motivos, Colombia.

## Referencias

Departamento Administrativo Nacional de Estadística [DANE]. (2024). Encuesta de Gasto Interno en Turismo-EGIT-2023. Recuperado de <https://microdatos.dane.gov.co/index.php/catalog/797>

Martínez, C., Gómez, J., y Ramírez, P. (2022). Sostenibilidad y turismo interno: un enfoque en Colombia. *Estudios de Turismo y Medio Ambiente*, 18(2), 89-105.

Pérez, L., & Rodríguez, M. (2021). El turismo interno como motor de desarrollo económico en América Latina. *Revista de Economía y Turismo*, 12(3), 45-63.

Such Devesa, M. J., Zapata Aguirre, S., Risso, W. A., Brida, J. G., & Pereyra, J. S. (2009). Turismo y crecimiento económico: Un análisis empírico de Colombia. *Estudios y perspectivas en turismo*, 18(1), 21-35.



# XIII ENCUENTRO NACIONAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

## Relación entre la gestión de recursos y la calidad de la educación media en Colombia

Andrés Felipe Cediel  
Juan Jefferson Vidales Delgado  
Edith Johana Medina Hernández

Filiación: Grupo de Investigación en Análisis Estadístico (GINVAE-UT)

Universidad del Tolima

e-mails: [afcediel@ut.edu.co](mailto:afcediel@ut.edu.co), [jjvidalesd@ut.edu.co](mailto:jjvidalesd@ut.edu.co), [ejmedinah@ut.edu.co](mailto:ejmedinah@ut.edu.co)

Ibagué, Colombia

Septiembre 3, 4 y 5 de 2025

### Resumen

En este estudio de estadística aplicada se busca analizar la relación existente entre la gestión de los recursos educativos y la calidad de la educación media en Colombia, con el fin de identificar factores que inciden en el desempeño de los estudiantes y territorios donde podrían existir riesgos de corrupción o falencias en la prestación del servicio educativo.

El análisis parte de la integración de indicadores provenientes de distintas bases de datos de fuentes oficiales: 1) Pruebas Saber 11 del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), 2) estadísticas educativas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), y 3) indicadores del Índice de Desempeño Municipal, del Departamento Nacional de Planeación (DNP). Mediante el uso de técnicas estadísticas multivariadas exploratorias, se identifican patrones territoriales de eficiencia educativa y de gestión de recursos educativos.

Este estudio se fundamenta en la necesidad de evidenciar empíricamente cómo una gestión adecuada o deficiente de los recursos, puede incidir en la calidad de los resultados educativos. Tal como argumentan Fomba, Talla y Ningaye (2023), la calidad institucional influye de manera significativa en el éxito escolar, lo que hace urgente considerar la dimensión administrativa como variable clave para la mejora educativa. De manera complementaria, Sahnoun y Abdennadher (2020) señalan que la corrupción reduce la eficiencia del gasto educativo, afectando negativamente los logros académicos, especialmente en territorios vulnerables de los países en vía de desarrollo.

En el contexto colombiano, Duque (2023) ha demostrado que la corrupción en el ámbito local impacta negativamente el rendimiento educativo, con mayor intensidad en zonas rurales y entre mujeres estudiantes. Esta evidencia refuerza la importancia de considerar variables territoriales y de gobernanza en el análisis propuesto. Por su parte, Muliati et al. (2022) destacan que una gestión eficiente de los recursos escolares requiere no solo de

planificación técnica, sino de participación activa de la comunidad educativa y visión integral de los procesos administrativos.

Por lo anterior, este análisis se alinea con lineamientos del ODS 4 sobre garantizar una educación inclusiva y de calidad para todos, y con políticas nacionales específicas como la Política Pública de Recursos Educativos (MEN & CERLALC, 2021), que promueve el uso eficaz de los recursos para mejorar el aprendizaje. También responde a la necesidad de evidencia empírica territorializada, ya que, como señala Duque (2023), pocos estudios exploran con desagregación municipal el vínculo entre gestión y resultados educativos, lo cual limita la formulación de políticas diferenciales y eficientes.

## Palabras clave

Recursos educativos, calidad educativa, educación media, estadística aplicada.

## Referencias

- [1] Fomba, B. K., Talla, D. F. y Ningaye, P. (2023). *Institutional Quality and Education Quality in Developing Countries: Effects and Transmission Channels*. *Journal of the Knowledge Economy*, 14, 86–115. <https://doi.org/10.1007/s13132-021-00869-9>
- [2] Sahnoun, M. y Abdennadher, C. (2020). *Education and Corruption: A Stochastic Frontier Analysis: Evidence from Developed and Developing Countries*. *Journal of the Knowledge Economy*, 11, 968–981. <https://doi.org/10.1007/s13132-019-00589-1>
- [3] Duque, S. (2023). *Impacto de la corrupción en la educación media en Colombia*. Universidad del Rosario. <http://hdl.handle.net/10554/65830>
- [4] Muliaji, A., Sihotang, W., Octaviany, R. A. y Darwin (2022). *Effectiveness of School Resources Management in Improving The Quality of Education*. *East Asian Journal of Multidisciplinary Research*, 1(6), 901–916. <https://doi.org/10.55927/eajmr.v1i6.480>
- [5] Ministerio de Educación Nacional – MEN y CERLALC (2021). *Más y mejores aprendizajes – Política Pública de Recursos Educativos*. [https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-411089\\_recurso\\_8.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-411089_recurso_8.pdf)



Universidad  
del Tolima



ACREDITADA  
DE ALTA CALIDAD

*¡Construimos la universidad que soñamos!*



## Encuentro Nacional de Matemáticas y Estadística

